CREMONA

# Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 3 (1864), p. 127-139

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__127_1>

## SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

### *Question* 380;

PAR M. CREMONA.

*Soient donnés un angle trièdre trirectangle ayant un sommet au point* S, *et un point quelconque* O *par lequel on mène un plan* P *coupant les faces de l'angle* *suivant* ABC; *trois parallèles aux côtés du triangle et passant par le point* O *partagent ce triangle en trois parallélogrammes et trois triangles* : $p$, $p'$, $p''$ *étant les aires des parallélogrammes, on a*

$$\frac{1}{p^2\sin^2(\mathrm{SA},\mathrm{P})}+\frac{1}{p'^2\sin^2(\mathrm{SB},\mathrm{P})}+\frac{1}{p''^2\sin^2(\mathrm{SC},\mathrm{P})}$$
$$=\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}+\frac{1}{p''}\right)^2\frac{1}{\sin^2(\mathrm{SO},\mathrm{P})}.$$

(Mannheim).

Prenons les arêtes $\delta$A, $\delta$B, $\delta$C du triangle trirectangle pour axes coordonnés; soient $a$, $b$, $c$ les coordonnées du point O, et

$$\lambda(x-a)+\mu(y-b)+\nu(z-c)=0$$

l'équation du plan ABC. Alors, en supposant O placé dans l'intérieur du triangle, on a les aires

$$p=\frac{bc\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}{\lambda},\quad p'=\frac{ca\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}{\mu},$$
$$p''=\frac{ab\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}{\nu},$$

c'est-à-dire que les aires $p$, $p'$, $p''$ sont proportionnelles aux quantités $\frac{1}{\lambda a}$, $\frac{1}{\mu b}$, $\frac{1}{\nu c}$. Il s'ensuit que

$$\frac{1}{\lambda^2p^2}+\frac{1}{\mu^2p'^2}+\frac{1}{\nu^2p''^2}\quad\text{et}\quad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}+\frac{1}{p''}\right)^2$$

sont proportionnelles aux quantités

$$a^2+b^2+c^2\quad\text{et}\quad(\lambda a+\mu b+\nu c)^2,$$

d'où

$$(1)\quad \frac{1}{\lambda^2p^2}+\frac{1}{\mu^2p'^2}+\frac{1}{\nu^2p''^2}=\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}+\frac{1}{p''}\right)^2\frac{a^2+b^2+c^2}{(\lambda a+\mu b+\nu c)^2},$$

ce qui exprime le théorème énoncé dans la question 380.

Si le point O tombe hors du triangle ABC, mais dans l'intérieur de l'un des angles BAC, CBA, ACB, par exemple dans ABC, les aires $p$, $p'$, $p''$ seront proportionnelles aux quantités $-\frac{1}{\lambda a}$, $\frac{1}{\mu b}$, $-\frac{1}{\nu c}$, d'où il suit que, dans ce cas, il faut changer le signe de $p'$ dans l'équation (1)

Si le point O se trouve hors des angles BAC, ABC, BCA, l'équation (1) reste la même.

Tout cela suit immédiatement de la manière dont l'aire du triangle ABC, qui est

$$\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}\,\frac{(\lambda a+\mu b+\nu c)^2}{\lambda\mu\nu},$$

est composée avec les aires des parallélogrammes et des triangles qui résultent des trois parallèles aux côtés BC, CA, AB. Ces dernières aires sont

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}{\mu\nu}\lambda a^2,\quad \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}{\nu\lambda}\mu b^2,\quad \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}{\lambda\mu}\nu c^2.$$

---

## *Question* 486

(voir t. XVIII, p. 357);

### PAR UN ÉLÈVE DU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND

L'aire de la podaire du centre d'une ellipse est une moyenne arithmétique entre les aires des cercles décrits sur les axes comme diamètres. (ARTHUR LESCASES.)

Soit l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

L'équation de la podaire sera

$$(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2.$$

Pour trouver l'aire de cette courbe, il est commode d'employer les coordonnées polaires. Prenons donc le centre de l'ellipse pour pôle et son grand axe pour axe polaire. L'équation de la podaire sera

$$\rho^2 = a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega.$$

Or, on sait que l'équation d'une courbe étant mise sous la forme $\rho = \varphi(\omega)$, l'aire de cette courbe comprise entre l'axe polaire et le rayon vecteur qui fait avec lui l'angle $\omega$, est donnée par la formule

$$u = \frac{1}{2}\int \rho^2 d\omega.$$

Dans le cas de la podaire d'ellipse, on aura donc

$$u = \frac{1}{2}\int (a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega)\,d\omega,$$

ou bien

$$u = \frac{a^2}{2}\int \cos^2\omega\,d\omega + \frac{b^2}{2}\int \sin^2\omega\,d\omega.$$

Or, on a

$$\int \cos^2\omega\,d\omega = \int \frac{1+\cos 2\omega}{2}\,d\omega = \frac{\omega}{2} + \frac{\sin 2\omega}{4} + \text{const.},$$

$$\int \sin^2\omega\,d\omega = \int \frac{1-\cos 2\omega}{2}\,d\omega = \frac{\omega}{2} - \frac{\sin 2\omega}{4} + \text{const.}$$

Par conséquent, on aura

$$u = \frac{a^2+b^2}{4}\omega + \frac{\sin 2\omega}{8}(a^2-b^2) + \text{const.}$$

La constante est nulle, puisque, pour $\omega = 0$, l'aire doit être nulle.

Nous aurons l'aire entière, en faisant dans la formule précédente $\omega = 2\pi$, et par conséquent on aura pour la surface cherchée

$$\text{surf} = \frac{\pi(a^2 + b^2)}{2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

---

## *Question* 540

(voir tome XIX, page 361);

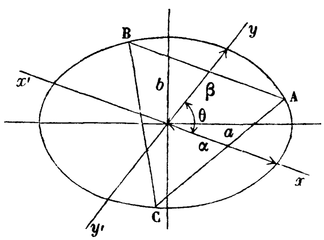
PAR M. HEMMING,

Élève de l'École Polytechnique de Zurich.

**Dans une ellipse donnée inscrire un triangle équilatéral dont le côté soit 1° un maximum, 2° un minimum.**

Rapportons la position de chaque triangle équilatéral ABC, inscrit dans l'ellipse donnée, à deux diamètres conjugués, dont l'un $xx'$ est parallèle au côté AB du triangle; il s'agit de déterminer ces diamètres conjugués, pour que le triangle satisfasse aux conditions données.

Soient $2\alpha$, $2\beta$ les longueurs des diamètres conjugués :




$2a$, $2b$ $(a > b)$ celles des axes de l'ellipse. Les coordonnées des sommets A, B, C du triangle sont

$$\text{A} \ldots\ldots \quad x, \quad \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2},$$

$$\text{B} \ldots\ldots \quad -x, \quad \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2},$$

$$\text{C} \ldots\ldots \quad x_1, \quad \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x_1^2}.$$

Le triangle étant équilatéral, on a les équations

$$4x^2 = (x - x_1)^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\sqrt{\alpha^2 - x^2} - \sqrt{\alpha^2 - x_1^2}\right)^2$$
$$+ 2\frac{\beta}{\alpha}(x - x_1)\left(\sqrt{\alpha^2 - x^2} - \sqrt{\alpha^2 - x_1^2}\right)\cos\theta,$$

$$4x^2 = (x + x_1)^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\sqrt{\alpha^2 - x^2} - \sqrt{\alpha^2 - x_1^2}\right)^2$$
$$- 2\frac{\beta}{\alpha}(x + x_1)\left(\sqrt{\alpha^2 - x^2} - \sqrt{\alpha^2 - x_1^2}\right)\cos\theta,$$

$\theta$ désignant l'angle que font les diamètres conjugués entre eux.

En soustrayant la seconde équation de la première, et divisant le résultat par $-4x$, on obtient

$$(1) \qquad x_1 - \frac{\beta}{\alpha}\left(\sqrt{\alpha^2 - x^2} - \sqrt{\alpha^2 - x_1^2}\right)\cos\theta = 0.$$

Combinant cette équation avec l'une des premières on a

$$(2) \qquad 3x^2 - x_1^2 \operatorname{tang}^2\theta = 0.$$

Considérant que

$$(3) \qquad \alpha\beta\sin\theta = ab, \quad \alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2,$$

la résolution des équations (1) et (2), par rapport à $x$ donne

$$(4) \qquad x^2 = \frac{48a^4b^4}{[3(a^2+b^2) - \xi]^2\xi + 12a^2b^2\xi}$$

en posant $\xi = \dfrac{4a^2b^2}{\alpha^2}$.

Puisque dans la dernière équation le numérateur est constant, suivant que le dénominateur sera un minimum ou un maximum, $x^2$, ou, ce qui sera la même chose, la valeur absolue $2x$ du côté du triangle sera maximum ou minimum.

En désignant par D le dénominateur, nous avons

$$\frac{dD}{d\xi} = [3(a^2+b^2)-\xi]^2 - 2\xi[3(a^2+b^2)-\xi] + 12a^2b^2 = 0.$$

Cette équation est satisfaite par les valeurs

$$(5) \qquad \xi = 2(a^2+b^2) \pm (a^2-b^2),$$

et, pour ces deux valeurs, nous avons la dérivée seconde

$$(6) \qquad \frac{d^2D}{d\xi^2} = \pm 6(a^2-b^2).$$

En prenant la première valeur

$$\xi = 2(a^2+b^2) + (a^2-b^2)$$

ou

$$(7) \qquad \alpha^2 = \frac{a^2b^2}{\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2},$$

le côté $2x$ du triangle devient un maximum : pour la seconde valeur, ou

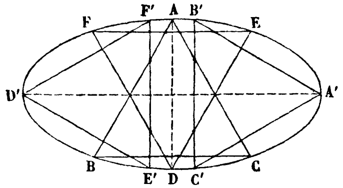
$$(8) \qquad \alpha^2 = \frac{a^2b^2}{\frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{4}b^2},$$

un minimum.

Considérant que

$$\frac{3}{4} = \sin^2 60^\circ = \sin^2 120^\circ$$
$$= \cos^2 30^\circ = \cos^2 150^\circ,$$
$$\frac{1}{4} = \cos^2 60^\circ = \cos^2 120^\circ$$
$$= \sin^2 30^\circ = \sin^2 150^\circ,$$

il est aisé de voir que les côtés des deux triangles équila-




téraux ABC et DEF, dont les sommets A et D coïncident avec les extrémités du petit axe AD de l'ellipse, sont des maxima, et que les côtés des deux triangles A'B'C' et D'E'F', dont les sommets A' et D' coïncident avec les extrémités A' et D' du grand axe, sont des minima.

---

## *Question* 651

(voir 2e série, t. II, p. 190);

PAR M. JAUFROID,
Professeur au lycée de Vendôme.

*Par deux points* A *et* B, *pris dans le plan d'une courbe d'un degré quelconque, on décrit une circonférence; on fait le produit des distances du point* A *à tous les points d'intersection de cette circonférence et de la courbe donnée; on fait le produit analogue pour le point* B : *le rapport de ces deux produits est constant, quelle que soit la circonférence passant par les points* A *et* B. (LAGUERRE.)

Je prends pour axe polaire la droite AB et pour origine le point A : la courbe donnée étant algébrique, son équation polaire est

$$f(\rho\cos\omega,\quad \rho\sin\omega)=0. \tag{1}$$

L'équation du cercle est, en posant AB $= a$ et AMB $= \theta$,

$$(2)\qquad \rho = a \sin\omega (\cot\omega + \cot\theta).$$

En appelant $\rho'$ la droite MB et $r = \frac{\rho}{\rho'}$, on a

$$(3)\qquad r = \sin\theta\,(\cot\omega + \cot\theta).$$

L'équation (3) donne

$$\cot\omega = \frac{r - \cos\theta}{\sin\theta},$$

et, par suite,

$$\sin\omega = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos\theta}}, \quad \cos\omega = \frac{r - \cos\theta}{\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos\theta}}.$$

Éliminant $\rho$ entre les équations (1) et (2), on a

$$f[a \sin\omega \cos\omega (\cot\omega + \cot\theta), \quad a \sin^2\omega (\cot\omega + \cot\theta)] = 0\ ;$$

remplaçant $\sin\omega$, $\cos\omega$, $\cot\omega$ par les valeurs précédentes, on obtient

$$f\left(\frac{ar^2 - ar\cos\theta}{1 + r^2 - 2r\cos\theta}, \quad \frac{ar\sin\theta}{1 + r^2 - 2r\cos\theta}\right) = 0.$$

$r$ entre dans le dénominateur de $\frac{ar\sin\theta}{1 + r^2 - 2r\cos\theta}$ à une puissance supérieure à celle qui entre dans le numérateur, et dans celui de $\frac{ar^2 - ar\cos\theta}{1 + r^2 - 2r\cos\theta}$ à une puissance égale : il suit de là que, dans les dénominateurs des différents termes de l'équation développée, la plus haute puissance de $r$ sera, ou plus grande que la plus grande puissance de $r$ qui entre dans les numérateurs, ou égale à cette plus haute puissance, laquelle alors proviendra du terme $ar^2$ dans les numérateurs. Donc, en chassant les dénominateurs, la plus haute puissance de $r$ aura un coefficient indépendant de $\theta$, et, comme le terme indépendant de $r$ restera visiblement le même qu'auparavant, il s'ensuit qu'en divisant tous les termes par le coefficient de la plus haute puissance de $r$, le dernier terme sera indépendant de $\theta$, et, par suite, il est démontré que le produit des différentes valeurs de $r$ est constant.

*Note.* — La même question a été résolue par M. de Marcilly, lieutenant-colonel du génie.

---

## *Deuxième solution de la question* 657;

PAR MM. COURTIN ET GODARD,
Élèves de Sainte-Barbe (cours de M. Moutard).

*Si l'équation*

$$Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots$$
$$+ Dx^p + Ex^{p-1} + Fx^{p-2} + Gx^{p-3} + \ldots + u = 0.$$

*a toutes ses racines réelles, les coefficients* D, E, F, G *de quatre termes consécutifs vérifient l'inégalité*

$$(DG - EF)^2 - 4(E^2 - DF)(F^2 - EG) < 0.$$

(CATALAN.)

En effet, soient $h'$ et $h''$ deux quantités indéterminées : multiplions l'équation par

$$(x - h')(x - h'') = x^2 - (h' + h'')x + hh'$$

et proposons-nous de disposer de $h'$ et de $h''$ de façon à faire disparaître les termes dont les coefficients sont F et G. Il est évident que l'équation qui nous donnera $h'$ et $h''$ devra avoir ses racines imaginaires, car une équation à coefficients réels ne peut manquer de deux termes consécutifs sans avoir des racines imaginaires. L'inégalité qui exprimera que les valeurs de $h'$ et $h''$ sont imaginaires aura donc lieu toutes les fois que l'équation proposée aura ses racines réelles.

Pour trouver cette condition, voyons ce que deviennent après la multiplication les quatre termes consécutifs.

On a :

$$\ldots + \mathrm{D}\left|\begin{array}{r} x^{p+2} + \qquad \mathrm{E} \\ -(h'+h'')\mathrm{D} \\ \phantom{0} \end{array}\right| \begin{array}{r} x^{p+1} + \qquad \mathrm{F} \\ -(h'+h'')\,\mathrm{E} \\ + \quad h'h''\,\mathrm{D} \end{array}\left|\, x^p \right.$$

$$\begin{array}{r} + \qquad \mathrm{G} \\ -(h'+h'')\mathrm{F} \\ + \quad h'h''\,\mathrm{E} \end{array}\left|\begin{array}{l} x^{p-1} + \ldots \\ \quad + \ldots \\ \phantom{0} \end{array}\right.$$

et pour que les termes du $p^{ième}$ et du $(p-1)^{ième}$ degré disparaissent, il faut que $(h'+h'') = y$, $h'h'' = x$ satisfassent aux relations

$$\mathrm{D}x - \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0,$$

$$\mathrm{E}x - \mathrm{F}y + \mathrm{G} = 0.$$

De là je tire

$$x = \frac{\mathrm{F}^2 - \mathrm{EG}}{\mathrm{E}^2 - \mathrm{DF}},$$

$$y = \frac{\mathrm{DG} - \mathrm{EF}}{\mathrm{E}^2 - \mathrm{DF}}.$$

L'équation du second degré qui donnera $h'$ et $h''$ sera

$$(\mathrm{E}^2 - \mathrm{DF})\mathrm{H}^2 - (\mathrm{DG} - \mathrm{EF})\mathrm{H} + \mathrm{F}^2 - \mathrm{EG} = 0,$$

et pour que cette équation ait ses racines imaginaires on doit avoir

$$(1) \qquad (\mathrm{DG} - \mathrm{EF})^2 - 4(\mathrm{E}^2 - \mathrm{DF})(\mathrm{F}^2 - \mathrm{EG}) < 0.$$

C. Q. F. D.

*Corollaire I.* — Quand la relation (1) n'est pas vérifiée, l'équation proposée a des racines imaginaires : car si elles étaient toutes réelles, la relation (1) serait vérifiée.

*Corollaire II.* — Si entre les coefficients E, F, G qui suivent immédiatement un coefficient nul, on a la relation

$$4EG - 3F^2 \gtreqless o,$$

l'équation a des racines imaginaires ; car, d'après la relation (1), si toutes les racines étaient réelles on aurait

$$E^2F^2 - 4E^2(F^2 - EG) < o,$$

ou bien

$$4EG - 3F^2 < o.$$

*Corollaire III.* — Il en est de même si l'on a

$$4DF - 3E^2 \gtreqless o,$$

car si toutes les racines étaient réelles on aurait d'après la relation (1)

$$E^2F^2 - 4F^2(E^2 - DF) < o,$$

ou bien

$$4DF - 3E^2 < o.$$

*Corollaires IV* et *V.* — En supposant successivement E et F nuls, on aura les relations

$$D(DG^2 + 4F^3) < o,$$
$$G(D^2G + 4E^3) < o,$$

ce qui démontre les corollaires IV et V.

La méthode que nous venons de suivre pourrait donner des formules plus générales conduisant à un certain nombre de conséquences.

Si on se proposait de faire disparaître trois termes, on serait amené à une équation du troisième degré en H qui aurait deux racines imaginaires, et, après avoir fait disparaître le terme en $H^2$, on écrirait l'inégalité

$$4p^3 + 27q^2 < o,$$

qui serait la relation cherchée.

Si pour des degrés supérieurs on connaissait la formule qui exprime la réalité des racines, la méthode, quoique difficile, serait applicable.

Enfin, si on suppose qu'on veuille faire disparaître un seul terme, une méthode analogue nous conduira à cette conséquence, que le carré d'un coefficient moins le produit de ceux qui le comprennent est $>$ o si les racines sont toutes réelles.

De là on déduit ce théorème connu : quand trois coefficients d'une équation sont en progression géométrique, l'équation a des racines imaginaires.