NOBLOT

QUANTIN

Question 636

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 97-100

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__97_0>

QUESTION 636;

SOLUTION DE MM. NOBLOT ET QUANTIN,
Élèves du lycée impérial de Lyon.

ÉNONCÉ. — *On suppose que des rayons lumineux perpendiculaires à l'axe d'une parabole soient, à leur rencontre avec cette courbe, réfléchis en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence : trouver l'enveloppe des rayons réfléchis, et déterminer géométriquement le point de contact d'un rayon réfléchi et de l'enveloppe.*

Il est à remarquer que la direction du rayon réfléchi est perpendiculaire à la droite qui joint le foyer F de la parabole au point où le rayon lumineux rencontre cette courbe.

Prenons l'équation de la parabole en coordonnées polaires :

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\omega}.$$

Soient ρ_1, ω_1 les coordonnées du point où le rayon incident rencontre la parabole, l'équation du rayon réfléchi est

$$\rho = \frac{\rho_1}{\cos(\omega_1 - \omega)}, \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{p}{(1 - \cos\omega_1)\cos(\omega_1 - \omega)}.$$

Éliminons ω_1 entre cette dernière équation et sa dérivée par rapport à ω_1. On a :

$$(1) \qquad \rho\,(1 - \cos\omega_1)\cos(\omega_1 - \omega) = p,$$

$$(2) \qquad \cos(\omega_1 - \omega)\sin\omega_1 - (1 - \cos\omega_1)\sin(\omega_1 - \omega) = 0.$$

De l'équation (2) on tire

$$(3) \qquad \operatorname{tang}(\omega_1 - \omega) = \frac{\sin\omega_1}{1 - \cos\omega_1} = \cot\frac{\omega_1}{2}.$$

En éliminant cos $(\omega_1 - \omega)$ entre (1) et (3) on trouve

$$\sin\frac{\omega_1}{2} = \sqrt[3]{\frac{p}{2.\rho}} = \alpha.$$

Il en résulte

$$\operatorname{tang}\omega_1 = \frac{2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{1-2\alpha^2}.$$

De l'équation (3) tirons tang ω_1, et égalons les deux valeurs de tang ω_1 :

$$\operatorname{tang}\omega_1 - \operatorname{tang}\omega = (1 + \operatorname{tang}\omega . \operatorname{tang}\omega_1)\cot\frac{\omega_1}{2}$$

$$= (1 + \operatorname{tang}\omega . \operatorname{tang}\omega_1)\sqrt{\frac{1-\alpha^2}{\alpha}};$$

d'où

$$\operatorname{tang}\omega_1 = \frac{\alpha\operatorname{tang}\omega + \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha - \operatorname{tang}\omega.\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

En égalant, il vient :

$$\alpha(3-4\alpha^2)\operatorname{tang}\omega = (4\alpha^2 - 1)\sqrt{1-\alpha^2};$$
$$\alpha^2(3-4\alpha^2)^2(1+\operatorname{tang}^2\omega) = 1;$$

et finalement :

$$\cos\omega = \alpha(3-4\alpha^2).$$

Remplaçons α par sa valeur, et nous aurons, pour l'équation demandée, en coordonnées polaires :

$$\cos\omega = 3\sqrt[3]{\frac{p}{2.\rho}} - 2.\frac{p}{\rho}.$$

Nous pouvons transformer en coordonnées rectilignes, mais remarquons d'abord que si l'on veut discuter l'équation obtenue en coordonnées polaires, on fera bien de la mettre sous la forme

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\omega}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{p}{2 \cdot \rho}},$$

ou

$$\rho = \frac{p}{2 \cdot \sin^3\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\omega}{3}\right)},$$

qu'on déduit de la précédente en remarquant que

$$\cos\omega = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\omega}{3}\right) - 4\sin^3\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\omega}{3}\right).$$

En posant

$$\cos\omega = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

on a

$$2(x + 2p)^3 = 27 \cdot p(x^2 + y^2).$$

Détermination directe du point de contact du rayon réfléchi et de son enveloppe.

Quand des rayons lumineux émanent d'un point A, le point de contact X du rayon réfléchi MX, avec la *caustique*, son enveloppe, est à une distance de M donnée par la formule

$$\lim \mathrm{MX} = \frac{\mathrm{AM} \cdot \mathrm{R} \cdot \cos\alpha}{2\,\mathrm{AM} - \mathrm{R}\cos\alpha} \ (*),$$

R étant le rayon de courbure en M.

Dans le cas qui nous occupe, AM est *infini*, et la for-

(*) Cette formule est démontrée dans les *Éléments de Calcul infinitésimal* de M. Duhamel (t. Ier, p. 205, édition de 1856); α est l'angle que le rayon incident forme avec la normale à la courbe au point M où ce rayon rencontre la courbe. G.

mule devient

$$\lim \mathrm{MX} = \frac{\mathrm{R}\cos\alpha}{2}.$$

La courbe étant une parabole

$$\mathrm{R} = \frac{(p+2x)}{p}\sqrt{p^2+y^2},$$

en prenant pour origine le sommet de la courbe.

La sous-normale est constante et égale à p; on a donc

$$\cos\alpha = \frac{y}{\sqrt{p^2+y^2}}.$$

Par suite,

$$\lim \mathrm{MX} = \frac{y\,(p+2x)}{2p}\ (^*).$$