NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL SERRET

Note sur le cercle tangent à trois cercles donnés

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 95-96

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__95_0>

NOTE SUR LE CERCLE TANGENT A TROIS CERCLES DONNÉS;

PAR M. PAUL SERRET.

1. THÉORÈME. — *Les cercles, en nombre infini, isogonaux à trois cercles donnés, forment quatre séries distinctes; et les cercles de chaque série ont, pour axe radical commun, l'un des quatre axes de similitude des trois cercles donnés.*

Considérons, en effet, deux cercles déterminés, isogonaux aux trois cercles donnés, et se coupant dans les deux points o et ω. Si l'on construit la figure réciproque de la proposée, par rapport à l'origine o, les deux cercles se transforment en deux droites concourantes; chacune de ces droites coupe sous un même angle les transformés des trois cercles donnés; et le point de concours ω' de ces droites est un centre de similitude commun aux trois cercles transformés. Dès lors, chacune des droites, en nombre infini, que l'on peut mener par le point de concours ω' des deux premières, coupe sous un même angle les trois cercles transformés; et chacun des trois cercles, passant par les points o et ω de la figure primitive, coupe, sous un même angle, les trois cercles primitifs.

D'ailleurs, les trois cercles transformés ayant un centre commun de similitude ω', si le point o est tel, que la droite $\omega' o$ rencontre les trois cercles, les *réciproques* de ceux-ci, par rapport à l'origine o, ou les trois cercles primitifs, seront coupés sous un même angle par la droite $o\omega'$ qui sera, dès lors, un axe de similitude de ces cercles. Cette propriété subsistera donc toujours, que la droite $o\omega'$ rencontre ou non les cercles transformés; et la droite $o\omega'$, ou $o\omega$, est un axe de similitude des trois cercles primitifs.

2. Si, parmi les cercles isogonaux aux trois cercles donnés, l'on considère en particulier le cercle orthogonal et le cercle tangent, on verra que « l'un quelconque des cercles tangents et le cercle orthogonal ont pour axe radical l'un des quatre axes de similitude des cercles proposés. » (Poncelet.) La construction du cercle tangent se réduisant dès lors à la détermination d'un cercle tangent à l'un quelconque des trois proposés, et ayant pour axe radical, par rapport au cercle orthogonal, l'un des quatre axes de similitude des cercles donnés. Chacun de ces axes donne naissance à deux cercles tangents, et le nombre des solutions est *huit*.

3. Si l'on voulait de même construire un cercle coupant, sous un même angle donné i, les trois cercles proposés, il suffirait encore de mener un cercle coupant, sous l'angle i, l'un quelconque des trois cercles proposés, et ayant pour radical commun, avec le cercle orthogonal, l'un des quatre axes de similitude. Comme celui du cercle tangent, le nouveau problème admet huit solutions; et tous les cercles isogonaux que l'on obtient en faisant varier l'angle i de o à $\frac{\pi}{2}$ ont, pour axe radical commun avec deux des huit cercles tangents, l'un des axes de similitude des trois cercles proposés.