

GAËTANO DE LYS

**Question proposée au concours d'admission
à l'École polytechnique (1862)**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 5-7

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_5_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE
POLYTECHNIQUE (1862);

SOLUTION DE M. GAETANO DE LYS.

*Trouver le lieu des centres des surfaces représentées
par l'équation*

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2pxz + 2qyz - 2ax - 2by + 2cz = 0$$

*(a, b, c étant des nombres positifs donnés, p et q des
paramètres variables) : 1° lorsque p et q varient de
toutes les manières possibles; 2° lorsque p et q varient
de manière à ce que l'équation représente un cône.
Distinguer la partie du lieu qui correspond à des hyper-
boloïdes à une nappe de celle qui correspond à des hy-
perboloïdes à deux nappes.*

Si l'on rapporte la surface à son centre, l'équation
prend la forme

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2pxz + 2qyz - ax' - by' + cz' = 0,$$

(x', y', z') désignant les coordonnées du centre. Sous cette
forme, qui se ramène facilement à la suivante :

$$(x + pz)^2 + (y + qz)^2 - (p^2 + q^2 + 1)z^2 - az' - by' + cz' = 0,$$

on reconnaît que l'équation représente généralement des hyperboloïdes à une ou deux nappes suivant le signe de la quantité

$$ax' + by' - cz',$$

savoir :

$ax' + by' - cz' > 0 \dots$ Hyperboloïde à une nappe.

$ax' + by' - cz' < 0 \dots$ Hyperboloïde à deux nappes.

$ax' + by' - cz' = 0 \dots$ Cônes.

Le lieu des centres dans les deux premiers cas s'obtient facilement par l'élimination de p et q entre les trois équations qui déterminent le centre

$$(1) \quad x' + pz' - a = 0,$$

$$(2) \quad y' + qz' - b = 0,$$

$$(3) \quad px' + qy' - z' + c = 0.$$

L'élimination donne

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - ax' - by' - cz' = 0,$$

équation d'une sphère dont le centre est au point $\frac{a}{2}, \frac{b}{2},$

$\frac{c}{2}$ et dont le rayon est $\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}}.$

2° Lorsque p et q varient de manière à ce que l'équation représente un cône, le lieu des sommets des cônes est déterminé par les deux équations

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - ax' - by' - cz' = 0,$$

$$ax' + by' - cz' = 0.$$

Le lieu est donc un cercle de la sphère déjà trouvée.

Le plan $ax' + by' - cz' = 0$ coupe la sphère en deux zones.

Celle qui est au-dessous du plan et pour laquelle on a

$$ax' + by' - cz' > 0,$$

est le lieu des centres des hyperboloïdes à une nappe.

(7)

La zone qui est au-dessus du plan et pour laquelle on a

$$ax' + by' - cz' < 0,$$

est le lieu des centres des hyperboloïdes à deux nappes.

Une remarque intéressante, c'est que l'un des paramètres p ou q étant supposé constant, on a l'équation générale des hyperboloïdes qui admettent pour sections planes communes une hyperbole équilatère et un cercle.

Note du Rédacteur. — Des solutions peu différentes nous sont parvenues en assez grand nombre; nous nous en tiendrons à la précédente, qui répond d'une manière simple et complète à la question proposée.
