Nouvelles annales de mathématiques

Henri Martin

Note sur l'emploi des imaginaires dans la recherche des fonctions primitives de quelques fonctions dérivées

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 57-60

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__57_1>

NOTE

Sur l'emploi des imaginaires dans la recherche des fonctions primitives de quelques fonctions dérivées ;

PAR M. HENRI MARTIN,
Élève en mathématiques spéciales (institution Barbet).

Exemple I^{er}. — Considérons la fonction dérivée $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

On a $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(x\sqrt{-1})^2}}$. Mais $\frac{1}{\sqrt{1-(x\sqrt{-1})^2}}$ est le produit de $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ par la dérivée de $\arcsin(x\sqrt{-1})$. Donc la fonction primitive de $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ est représentée par

$$\frac{\arcsin(x\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}} + C.$$

La question est donc ramenée à évaluer cette dernière fonction.

Or, de la formule d'Euler :

$$e^{y\sqrt{-1}} = \cos y + \sqrt{-1}\,.\sin y,$$

on tire·

$$y = \frac{\mathrm{L}\left(\cos y + \sqrt{-1}\sin y\right)}{\sqrt{-1}},$$

et, en posant

$$\sin y = x\sqrt{-1},$$

il vient

$$\operatorname{arc}\sin x\sqrt{-1} = \frac{\mathrm{L}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)}{\sqrt{-1}},$$

d'où

$$\frac{\operatorname{arc}\sin x\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = -\mathrm{L}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \mathrm{L}\left(\sqrt{1+x^2} + x\right).$$

Par conséquent la fonction primitive cherchée est

$$\mathrm{L}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \mathrm{C}.$$

Exemple II. — Soit $\sqrt{1+x^2}$ la dérivée proposée.

En remplaçant x par $x\sqrt{-1}$, elle devient $\sqrt{1-x^2}$, expression de l'ordonnée correspondante à l'abscisse x dans le cercle $y^2 + x^2 = 1$. Il en résulte que $\sqrt{1-x^2}$ est la dérivée du segment de cercle compris entre l'axe des y et l'ordonnée correspondante à l'abscisse x, segment qui est égal à

$$\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arc}\sin x\right).$$

D'où il suit que $\sqrt{1+x^2}$ est la dérivée de

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(x\sqrt{-1}\,.\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arc}\sin x\sqrt{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \frac{\operatorname{arc}\sin x\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}\right).$$

Mais

$$\frac{\arc\sin(x\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}} = L(x+\sqrt{1+x^2}), \quad (\textit{Ex. I}^{er}.)$$

donc la fonction primitive de $\sqrt{1+x^2}$ est

$$\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2}+L(x+\sqrt{1+x^2})\right]+C.$$

Exemple III. — Considérons la fonction dérivée $L(1+x^2)$.

On a

$$\begin{aligned} L(1+x^2) &= L(1+x\sqrt{-1})(1-x\sqrt{-1}) \\ &= L(1+x\sqrt{-1})+L(1-x\sqrt{-1}). \end{aligned}$$

Or, la fonction primitive de $[Lf(x)]f'(x)$ est, comme on sait, $f(x).Lf(x)-f(x)+C$; donc, en négligeant les constantes, la fonction primitive de

$$L(1+x\sqrt{-1})+L(1-x\sqrt{-1})$$

sera

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}[(1+x\sqrt{-1}\,.\,L(1+x\sqrt{-1})-x\sqrt{-1}$$
$$-(1-x\sqrt{-1})L(1-x\sqrt{-1})-x\sqrt{-1}],$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\left[L(1+x\sqrt{-1})-L(1-x\sqrt{-1})\right]$$
$$+x\left[L(1+x\sqrt{-1})+L(1-x\sqrt{-1})\right]-2x.$$

Si nous remplaçons $L(1+x\sqrt{-1})$, $L(1-x\sqrt{-1})$, par leurs expressions connues :

$$L(\sqrt{1+x^2})+\sqrt{-1}\arc\tan g x,$$
$$L(\sqrt{1+x^2})-\sqrt{-1}\arc\tan g x,$$

la fonction obtenue devient

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(2\sqrt{-1}\ \text{arc tang}\,x\right)+x\left(2.\,\mathrm{L}\sqrt{1+x^2}\right)-2x,$$

ou

$$2.\text{arc tang}\,x+x.\mathrm{L}\,(1+x^2)-2x+\mathrm{C},$$

qui est la fonction primitive cherchée.