NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. ANDLAUER
G. CHAUVEAU

Solution de la question 628

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 54-57
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__54_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 628;

PAR MM. L. ANDLAUER ET G. CHAUVEAU,
Élèves en Mathématiques spéciales.

Étant donné un tétraèdre quelconque, on peut faire passer par les centres de gravité des quatre faces un ellipsoïde tangent à ces mêmes faces. Il aura pour centre le centre de gravité du tétraèdre. Et si on appelle $3a$, $3b$, $3c$ *les arêtes adjacentes à un même angle solide, qu'on prenne des axes parallèles à ces arêtes, et pour origine le centre de gravité du tétraèdre, l'équation de la surface tangente sera*

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 + \frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc} = \frac{3}{8}.$$

(VANNSON.)

Prenons pour axes des coordonnées x, y, z, trois arêtes adjacentes du tétraèdre, dont les longueurs seront désignées par $3a$, $3b$, $3c$.

Pour qu'une surface du second degré,

$$A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B yz + 2 B' xz + 2 B'' xy + 2 C x \\ + 2 C' y + 2 C'' z + D = 0,$$

soit tangente aux trois faces du tétraèdre, prises pour plans de coordonnées, et aux centres de gravité de ces faces, dont les coordonnées sont

$$(x = 0,\ y = b,\ z = c),$$
$$(y = 0,\ z = c,\ x = a),$$
$$(z = 0,\ x = a,\ y = b),$$

il faut que les coefficients, A, A', etc., satisfassent aux conditions suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} Aa + B''b + C &= 0, \\ A'b + B''a + C' &= 0, \\ Ca + C'b + D &= 0, \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} Aa + B'c + C &= 0, \\ A''c + B'a + C'' &= 0, \\ Ca + C''c + D &= 0, \end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} A'b + Bc + C' &= 0, \\ A''c + Bb + C'' &= 0, \\ C'b + C''c + D &= 0. \end{aligned}\right.$$

C'est ce qu'on trouve facilement par la considération de l'équation générale des plans tangents aux surfaces du second degré.

Les dernières équations des systèmes (1), (2), (3) donnent

$$C = -\frac{D}{2a},\quad C' = -\frac{D}{2b},\quad C'' = -\frac{D}{2c}.$$

En cherchant, de même, les conditions pour que la surface du second degré soit tangente à la quatrième face du tétraèdre, représentée par

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-3=0,$$

et à son centre de gravité dont les coordonnés sont

$$x=a,\quad y=b,\quad z=c,$$

on trouve, en ayant égard aux équations qui précèdent :

$$(4)\qquad B=\frac{D}{6.bc},\quad B'=\frac{D}{6.ac},\quad B''=\frac{D}{6.ab}.$$

Et, au moyen des expressions de C, C′, C″, B, B′, B″ en fonction de D, les équations (1), (2), (3) donnent

$$A=\frac{D}{3a^2},\quad A'=\frac{D}{3b^2},\quad A''=\frac{D}{3c^2}.$$

Ces valeurs de A, A′, A″, B, B′, B″, C, C′, C″ vérifient toutes les équations de conditions obtenues, quel que soit D qui reste indéterminé.

En remplaçant les coefficients A, A′,..., C′, C″, par leurs valeurs, dans l'équation

$$\begin{aligned}&Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy\\&+2Cx+2C'y+2C''z+D=0,\end{aligned}$$

il en résulte

$$(5)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ac}+\frac{xy}{ab}-\frac{3x}{a}-\frac{3y}{b}-\frac{3z}{c}+3=0,$$

équation qui représente un ellipsoïde réel.

Les coordonnées du centre de cette surface sont données par les équations

$$\frac{2x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-3=0,$$

$$\frac{x}{a}+\frac{2y}{b}+\frac{z}{c}-3=0,$$

et

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{2z}{c}-3=0.$$

On voit que les coordonnées du centre de gravité, qui sont

$$x=\frac{3a}{4},\quad y=\frac{3b}{4},\quad z=\frac{3c}{4},$$

satisfont à ces équations.

Au reste, si on rapporte la surface à son centre, en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes, on trouve

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ac}+\frac{xy}{ab}=\frac{3}{8}.$$

Note du Rédacteur. — M. Lignières a résolu la même question par un calcul qui diffère peu du précédent.