NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JOHN GRIFFITHS

Sur les équations de quelques cercles

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 543-547

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__543_1>

SUR LES ÉQUATIONS DE QUELQUES CERCLES;

PAR M. JOHN GRIFFITHS,
Jesus college, Oxford.

Soit ABC un triangle dont les côtés BC, CA, AB sont représentés par les équations

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0.$$

Désignons par $A_1B_1C_1$; $A_2B_2C_2$;... $A_nB_nC_n$, une série de triangles, dont les sommets A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2;... A_n, B_n, C_n, sont les milieux des côtés BC, CA, AB; B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1;... $B_{n-1}C_{n-1}$, $C_{n-1}A_{n-1}$, $A_{n-1}B_{n-1}$, respectivement : trouver l'équation en α, β, γ du cercle des neuf points passant par A_n, B_n, C_n.

Pour obtenir l'équation cherchée, il faut d'abord trouver les équations des droites B_nC_n, C_nA_n, A_nB_n.

Si a, b, c désignent les côtés opposés aux sommets A, B, C; et p, q, r les perpendiculaires abaissées de ces sommets sur une droite quelconque, l'équation de cette droite sera

$$(1) \qquad pa\alpha + qb\beta + rc\gamma = 0.$$

Or, en représentant par $p_a, p_1, p_2, \ldots, p_n$ les longueurs des perpendiculaires abaissées du sommet A sur les droites BC, B_1C_1, $B_2C_2, \ldots, B_nC_n$, on a

$$p_a = p_a,$$

$$p_1 = \frac{1}{2} p_a,$$

$$p_2 = \frac{1}{2}(p_1 + p_a),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_n = \frac{1}{2}(p_{n-1} + p_{n-2}),$$

d'où, par l'intégration de l'équation

$$u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n),$$

on trouve

$$p_n = \frac{2}{3}\left[1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right] p_a,$$

et, par conséquent,

$$p_a - p_n = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right] p_a;$$

donc, d'après (1), l'équation de B_nC_n et par suite celles de C_nA_n, A_nB_n seront

$$(2) \quad \begin{cases} [2^n + (-1)^{n+1}](b\beta + c\gamma) - [2^{n+1} + (-1)^n]a\alpha = 0, \\ [2^n + (-1)^{n+1}](c\gamma + a\alpha) - [2^{n+1} + (-1)^n]b\beta = 0, \\ [2^n + (-1)^{n+1}](a\alpha + b\beta) - [2^{n+1} + (-1)^n]c\gamma = 0. \end{cases}$$

Il reste à trouver l'équation du cercle passant par les points d'intersection des lignes

$$\begin{cases} \lambda_1\alpha + \mu_1\beta + \nu_1\gamma = 0, \\ \lambda_2\alpha + \mu_2\beta + \nu_2\gamma = 0, \\ \lambda_3\alpha + \mu_3\beta + \nu_3\gamma = 0. \end{cases}$$

Elle est

$$(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)\frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}}{\lambda_1\alpha + \mu_1\beta + \nu_1\gamma} + (\lambda_2, \mu_2, \nu_2)\frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix}}{\lambda_2\alpha + \mu_2\beta + \nu_2\gamma}$$

$$+ (\lambda_3, \mu_3, \nu_3)\frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix}}{\lambda_3\alpha + \mu_3\beta + \nu_3\gamma} = 0,$$

où nous posons, pour abréger,

$$(\lambda, \mu, \nu) = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 2\mu\nu\cos A - 2\nu\lambda\cos B - 2\lambda\mu\cos C.$$

Ainsi, on a pour l'équation cherchée,

$$\frac{a^2}{b\beta + c\gamma - k_n a\alpha} + \frac{b^2}{c\gamma + a\alpha - k_n b\beta} + \frac{c^2}{a\alpha + b\beta - k_n c\gamma} = 0,$$

où

$$k_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{2^n + (-1)^{n+1}}.$$

Quand on pose $n = \infty$, on a $k_n = 2$; d'où l'on voit que ces cercles de neuf points ont pour limite le point de concours des droites

$$\begin{cases} b\beta + c\gamma - 2a\alpha = 0, \\ c\gamma + a\alpha - 2b\beta = 0, \\ a\alpha + b\beta - 2c\gamma = 0. \end{cases}$$

Le point dont il s'agit coïncide évidemment (*) avec le centre de gravité de l'aire ABC.

En faisant

$$L = a\alpha + b\beta + c\gamma, \quad p_n = (1 + k_n),$$

(*) Cela devient encore bien plus évident quand on fait usage de quelques considérations géométriques très-simples tirées de la similitude des triangles considérés. P.

nous aurons pour les équations des cercles passant par A_r, B_r, C_r; A_s, B_s, C_s respectivement,

$$S_r = a^2(L - \rho_r b\beta)(L - \rho_r c\gamma) + b^2(L - \rho_r c\gamma)(L - \rho_r a\alpha) + c^2(L - \rho_r a\alpha)(L - \rho_r b\beta) = 0,$$

$$S_s = a^2(L - \rho_s b\beta)(L - \rho_s c\gamma) + b^2(L - \rho_s c\gamma)(L - \rho_s a\alpha) + c^2(L - \rho_s a\alpha)(L - \rho_s b\beta) = 0,$$

d'où

$$\rho_s^2 S_n - \rho_r^2 S_s = L^2(\rho_s^2 - \rho_r^2)(a^2 + b^2 + c^2) - L\rho_r\rho_s(\rho_s - \rho_r) \times [a^2(b\beta + c\gamma) + b^2(c\gamma + a\alpha) + c^2(a\alpha + b\beta)],$$

et par conséquent

$$\rho_s^2 S_r - \rho_r^2 S_s = L(\rho_s - \rho_r) \times [(a^2 + b^2 + c^2)(\rho_r + \rho_s - \rho_r\rho_s)L + \rho_r\rho_s(a^3\alpha + b^3\beta + c^3\gamma)];$$

donc l'axe radical des cercles S_r, S_s a pour équation

$$\left(\frac{1}{\rho_r} + \frac{1}{\rho_s} - 1\right)(a^2 + b^2 + c^2)L + a^3\alpha + b^3\beta + c^3\gamma = 0.$$

Il suit de là que l'axe radical de deux quelconques des cercles considérés est donné en direction par l'équation

$$a^3\alpha + b^3\beta + c^3\gamma = 0.$$

Si l'on fait $S = 0$, on aura $k_s = \infty$, et, par conséquent, $\rho_s = \infty$, ou $\frac{1}{\rho_s} = 0$.

Donc l'axe radical de S_r, S_0 a pour équation

$$\left(\frac{1}{\rho_r} - 1\right)(a^2 + b^2 + c^2)L + a^3\alpha + b^3\beta + c^3\gamma = 0;$$

le cercle représenté par S_0 est évidemment le cercle circonscrit au triangle ABC.

Il est bon de remarquer que la droite

$$a^3\alpha + b^3\beta + c^3\gamma = 0$$

est parallèle à

$$\alpha \cos A + \beta \cos B + \gamma \cos C = 0.$$

Or, cette dernière équation représente l'axe radical commun des cercles S_0, S, Σ, où Σ désigne le cercle par rapport auquel chaque sommet A, B, C est le pôle du côté opposé. On trouve donc que tous les axes radicaux du système Σ, S_0, S_1, S_2,..., S_n sont parallèles.

On peut démontrer d'une manière analogue que l'équation du cercle inscrit au triangle $A_n B_n C_n$ sera

$$\sqrt{\cot\frac{A}{2}(b\beta + c\gamma - k_n a\alpha)} + \sqrt{\cot\frac{B}{2}(c\gamma + a\alpha - k_n b\beta)} + \sqrt{\cot\frac{C}{2}(a\alpha + b\beta - k_n c\gamma)} = 0.$$