

K.-L. BIERNATZKI

**Arithmétique et algèbre des chinois (fin) (voir
Bulletin mathématique, t. VIII, 1862, p. 35)**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 529-540

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_529_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ARITHMÉTIQUE ET ALGÈBRE DES CHINOIS (fin)

(voir BULLETIN MATHÉMATIQUE, t. VIII, 1862, p. 35);

PAR M. K.-L. BIERNATZKI, DOCTEUR A BERLIN.

CRELLE, t. LII, p. 59; 1856.

Telle est l'analyse succincte de cette œuvre remarquable pour son antiquité; chaque division et sous-division est accompagnée d'une stance pour l'imprimer dans la mémoire.

A cet ouvrage s'infèrent tous les développements ultérieurs de l'arithmétique; car tel est le culte des ancêtres chez les Chinois, qu'aucun auteur ne se permet d'avancer une règle, comme sienne; il la rattache toujours, comme explication, extension à une règle donnée par un ancien. Cette modestie est chez eux un acte de religion (*).

La règle la plus féconde, la plus remarquable est la *Ta-yuen* ou la *grande extension*, la recherche des quantités inconnues dans l'analyse indéterminée du 1^{er} degré. On la trouve sous sa forme première dans le *Swan-king*, classiques arithmétiques du célèbre *Sun-tzée*. Quelques historiens chinois croient que c'est un officier qui a vécu 220 ans avant l'ère vulgaire; d'autres le placent avec plus de raison au III^e siècle après J.-C., vers la fin de la dynastie des *Han* et au commencement de la dynastie des *Weih*. La règle de *Sun-tzée* débute par quatre lignes ri-

(*) Cette abnégation du *moi* n'est pas la plus brillante de nos qualités. Il existe chez nous deux tendances: voiler ce que nous devons aux prédécesseurs, dévoiler ce que le voisin leur doit. (Note de M. Terquem.)

mées et est enveloppée dans les questions suivantes :

Un nombre divisé par 3 donne le reste 2 ; divisé par 5 donne le reste 3 ; divisé par 7 donne le reste 2 ; quel est ce nombre ? Le procédé est indiqué sous cette forme mystique :

Divisé par 3 donne le reste 2, écris 140,

Divisé par 5 donne le reste 3, écris 63,

Divisé par 7 donne le reste 2, écris 30 ;

ces trois nombres ajoutés donnent 233, en retranchant 210, le reste 23 est le nombre cherché. Ce procédé tronqué est suivi de cet aphorisme également tronqué :

Pour 1 obtenu par 3, pose 70,

Pour 1 obtenu par 5, pose 21,

Pour 1 obtenu par 7, pose 15.

Si la somme est 106 ou davantage, on soustrait 105 et le reste est le nombre cherché.

Un auteur plus récent, Tsiu-kiu-tschaou, qui vivait vers la fin de la dynastie Sung, donne l'explication suivante de cet aphorisme :

On fait le produit $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ *Yeu-mu*, extension fondamentale ;

$\frac{105}{7} = 15$ *Yeu-su*, nombre extensif ; ce diviseur 7 porte

le nom de nombre fondamental déterminé *Ting-mu*.

$15 = 7 \cdot 2 + 1$, 1 Tsching, multiplicateur ;

$15 \cdot 1 = 15$ *Yeug-su*, nombre auxiliaire ;

c'est ce qui explique la locution ci-dessus : pour 1 obtenu par 7, pose 15.

On agit de même par rapport aux facteurs 5 et 3, ainsi :

$\frac{105}{5} = 21$, nombre extensif ;

(531)

$21 = 5 \cdot 4 + 1$, 1 multiplicateur;

$21 \cdot 1 = 21$, nombre auxiliaire;

c'est ce que signifie ci-dessus: 1 obtenu par 5, pose 21.

$\frac{105}{3} = 35$, nombre extensif;

$35 = 3 \cdot 11 + 2$, 2 multiplicateur;

$2 \cdot 35 = 70$, nombre auxiliaire.

Ces trois nombres auxiliaires 15, 21, 70, servent à continuer l'opération; on multiplie chacun par le reste correspondant; ainsi

$$15 \times 2 = 30, \quad 21 \times 3 = 63, \quad 70 \times 2 = 140, \\ 30 + 63 + 140 = 233,$$

$233 - 105 = 128$, $128 - 105 = 23$, nombre cherché.

Cette explication a besoin d'explication.

Supposons qu'on cherche un nombre qui, divisé par p_1 laisse pour reste s_1 , par p_2 laisse pour reste s_2 , par p_3 laisse pour reste s_3 , et soient

$$p_1 p_2 = p_3 + r_3,$$

$$p_1 p_3 = p_2 + r_2,$$

$$p_2 p_3 = p_1 + r_1,$$

et

$$N = p_1 p_2 r_3 s_3 + p_1 p_3 r_2 s_2 + p_2 p_3 r_1 s_1,$$

N divisé par p_1 laisse le même reste que $p_2 p_3 r_1 s_1$ divisé par p_1 ; le même reste que $r_1^2 s_1$; donc si r_1^2 divisé par p_1 laisse pour reste l'unité, N divisé par p_1 laissera pour reste s_1 ; de même, si r_2^2 divisé par p_2 laisse pour reste l'unité, N divisé par p_2 laissera pour reste s_2 , et si r_3^2 divisé par p_3 laisse l'unité pour reste, N divisé par p_3 laissera pour reste s_3 . Or, dans l'exemple de l'auteur chinois, les restes r_1 , r_2 , r_3 satisfont à ces conditions. Si elle n'existe pas, la solution cesse d'être bonne. Cette règle

Ta-yen servit dans la suite à calculer les cycles du prêtre nommé *Yih-king*, qui eut le mérite d'en avoir fait la première application; il mourut peu après la publication de son célèbre ouvrage *Ta-yen-lei-schu* en + 717; *Tsiu-kiu-tschaou*, ci-dessus dénommé, a composé un commentaire sur cet ouvrage, sous le titre de *Neuf sections de l'arithmétique*, pour le *Kiu-tschang*.

I^e Section. — Nombres *extensifs*, *auxiliaires* comme ci-dessus.

Je n'ai pu comprendre ce qu'on en dit. Ces nombres servaient chez les Chinois à prédire l'avenir et constituaient l'art des prédictions. A cet effet, des signes particuliers étaient affectés à ces nombres comme *clefs*; l'unité était figurée par deux traits, le 2 par un trait brisé, le 3 par un trait entier, le 4 par un trait entier et un trait brisé, etc. ; c'est l'origine des *diagrammes*, restes d'un ancien système de prédictions, dont on ne peut trouver l'origine.

II^e Section. — Applications astronomiques au calcul des cycles.

III^e Section. — Traité du travail.

Quatre compagnies d'ouvriers renfermant chacune des nombres donnés et différents d'ouvriers entreprennent la construction d'une digue; on assigne à chaque compagnie une partie de la digue à construire.

IV^e Section. — Calcul des capitaux.

Sept capitaux égaux sont successivement diminués par des effets tirés chaque jour sur eux, de divers montants. La grandeur des capitaux et le nombre de jours qu'on a tirés sur eux sont inconnus, mais on connaît le montant des effets et ce qui reste des capitaux; trouver la somme des capitaux primitifs.

V^e Section. — Trois fermiers possèdent chacun la même quantité de blé, qui a été achetée à divers marchés et d'après diverses mesures. L'excédant au-dessus de la mesure normale est connu; trouver la quantité de blé.

VI^e Section. — Trois régiments marchent vers la capitale; on connaît le nombre de lieues que fait chaque régiment par jour et l'heure où chaque régiment arrive à la capitale; trouver la distance de la capitale au lieu commun du départ.

VII^e Section. — Problème des courriers de diverses vitesses.

VIII^e Section. — Problème sur la fondation d'un édifice où l'on emploie quatre sortes de briques; on donne les dimensions des briques; en déduire les dimensions de la fondation.

IX^e Section. — Problème : trois tonneaux remplis chacun de la même quantité de riz ont été vidés en partie par des voleurs; on ne sait pas combien il y avait de riz en tout, mais on sait qu'il reste :

Dans le 1^{er} tonneau 1 *ho*,
Dans le 2^e tonneau 1 *sching* et 1 *ho*,
Dans le 3^e tonneau 1 *ho*.

Les voleurs étant pris ont avoué :

Le voleur A d'avoir puisé à diverses fois dans le 1^{er} tonneau avec une pelle à écurie;

Le voleur B d'avoir puisé à diverses fois dans le 2^e tonneau avec un sabot;

Le voleur C d'avoir puisé à diverses fois dans le 3^e tonneau avec une écuelle.

On s'est assuré que :

La pelle à écurie contient 1 *sching* et 1 *ho*,
 Le sabot 1 *sching* et 7 *ho*,
 L'écuelle 1 *sching* et 2 *ho*;

combien chaque voleur a-t-il pris de riz?

Réponse :

Le voleur A a pris 3 *schih* 1 *tau* 9 *sching* 2 *ho*,
 Le voleur B a pris 3 *schih* 1 *tau* 7 *sching* 9 *ho*,
 Le voleur C a pris 3 *schih* 1 *tau* 9 *sching* 2 *ho*.

La totalité du riz enlevé = 9 *schih* 5 *tau* 6 *sching* 3 *ho*.

Note. — 10 *ho* valent 1 *sching*, 10 *sching* valent 1 *tau*, 10 *tau* valent 1 *schih*; réduisant tout en *ho*, on est amené à l'équation d'analyse indéterminée

$$11x + 1 = 17y + 11 = 12z + 1.$$

La seconde partie de l'ouvrage de Tsiu-kiu traite uniquement de calculs relatifs à l'astronomie et à la physique et toujours par la célèbre règle Ta-yuen. Les Indiens ont une semblable règle sous le nom de *Cuttaca*. Il n'est pas vraisemblable que les Chinois l'aient reçue des Indiens.

Algèbre.

Vers la fin du XIII^e siècle, le même Tsiu-kiu-tschaou, ci-dessus dénommé, fit paraître le *Lien-tien-yuen-yih*, c'est-à-dire *Établissement de la monade céleste*. Cet ouvrage contient pour ainsi dire l'algèbre des Chinois; la *monade*, c'est notre inconnue *x*. Comme les Chinois n'ont pas d'alphabet, ils écrivent les polynômes par un système de positions comme les nombres; ils ont un signe particulier qui se prononce *Tae*, pour désigner la quantité

toute connue et un autre signe qui se prononce *Yuen*, pour désigner le terme qui renferme la 1^{re} puissance de l'inconnue; l'inconnue elle-même ne s'écrit pas, elle est sous-entendue comme *unité, monade*; on n'écrit que les coefficients numériques. Par exemple, soit à écrire le polynôme $x^3 + 15x^2 + 66x - 360$, ils écrivent

$$\begin{array}{r}
 | \dots\dots\dots x^3 \\
 | \equiv \dots\dots\dots 15x^2 \\
 \text{T } \perp \dots\dots\dots 66x \\
 \text{III } \text{T } \text{O} \dots\dots\dots 360
 \end{array}$$

On voit qu'en allant de bas en haut, les exposants de la monade augmentent d'une unité. Dans la pratique, lorsqu'on écrit *Tae* on omet *Yuen*, et quand on écrit *Yuen* on omet *Tae*.

Les quantités s'écrivent avec de l'encre rouge et les quantités négatives avec de l'encre noire, signes distincts qu'on rencontre déjà dans les écrits du vi^e siècle; mais le *Yay-king-juï-king*, qui a écrit un commentaire sur le *Lei-tien-yuen*, paraît être le premier qui ait distingué le membre à droite d'une équation par un trait transversal. Le terme qui est immédiatement au-dessus du *Tae* est la racine carrée ou $x^{\frac{1}{2}}$, au-dessus de celle-ci c'est la racine cubique, et ainsi de suite.

Voici un exemple de résolution numérique d'une équation du quatrième degré tiré de l'ouvrage de *Tsiu*. Nous nous servons des chiffres arabes. L'équation est (*)

$$x^4 - 1534464x^2 + 731124800x = 526727577600.$$

(*) L'équation donnée dans le Mémoire de M. Biernatzki est fautive : *a* porte le signe + et *b* est oublié. Tm.

On ne donne que des résultats sans expliquer l'opération.
Voici ce que j'ai compris.

Faisons, pour épargner de la place,

$$a = 1534464, \quad b = 731124800, \quad c = 526727677600,$$

$$x^4 - ax^2 + 6x = c.$$

La racine quatrième approchée de c est 720.

Faisons

$$x = y + 700,$$

$$(y + 700)^4 - a(y + 700)^2 + b(y + 700) - c = 0,$$

ou

$$y^4 + 2800y^3 + 1405536y^2 - 45124800y - 526727677600 = 0.$$

A la même époque un autre géomètre, nommé Tschu-schi-kils, publia, en 1303, le *Sze-yuen-yuh-kihu* (Miroir précieux des quatre éléments). Son ouvrage commence par le rapport des *Lihu* (coefficients) dans le calcul des nombres jusqu'à la huitième puissance. Il donne la table suivante comme une ancienne méthode :

					1	somme primitive,
				1	1	facteurs,
			1	2	1	carré,
		1	3	3	1	carré cube,
	1	4	6	4	1 . .	carré-carré,
1	5	10	10	5	1	cinquième puissance, etc.

C'est le triangle de Pascal (*).

Les quatre éléments sont quatre *signes* tirés de l'écriture chinoise et représentant le ciel, la terre, l'homme, la chose; les trois premiers sont consacrés aux quantités connues (notre a , b , c) et la dernière la quantité incon-

(*) Ce triangle se retrouve, en Europe, dans presque toutes les arithmétiques du xvi^e siècle. P.

nue (x); il les dispose ainsi autour de Tae :

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & \text{Tae} & 1 \\ & 1 & \end{array}$$

Le 1 supérieur est la *chose*, soit x ; l'inférieur c'est le *ciel* (a); à droite c'est l'*homme* (c), et à gauche la *terre* (b); ainsi

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ b & \text{Tae} & c \\ & a & \end{array}$$

Supposons qu'il s'agisse d'écrire

$$(a + b + c + x)^2 \\ = a^2 + 2ab + 2ac + 2ax + b^2 + 2bc + 2bx + c^2 + 2cx + x^2,$$

Tschu le figure ainsi

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & & 2 & 0 & 2 \\ & & & & 2 \\ 1 & 0 & \text{Tae} & 0 & 1 \\ & & 2 & & \\ & & 2 & 0 & 2 \\ & & & & 1 \end{array}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{array}{ccccc} & & x^2 & & \\ & & 2bx & 0 & 2cx \\ & & & & 2ax \\ b^2 & & \text{Tae} & & c^2 \\ & & 2bc & & \\ 2ab & & 0 & & 2ac \\ & & a^2 & & \end{array}$$

On voit que la disposition des quantités connues et inconnues correspond au tableau des quatre éléments.

Vers la fin du xviii^e siècle les missionnaires composèrent une Algèbre en chinois sous le titre : *Tseay-kang-fang*, et la présentèrent à l'empereur Kang. C'est à cette occasion que cet empereur ordonna la confection de la célèbre encyclopédie dont il révisa chaque feuille. Le titre chinois est : *Leuh-lei-yuen-yuen* (Sources secrètes de l'harmonie et des nombres). La troisième partie de cet excellent ouvrage, intitulée : *Suh-li-tsing-wang* (Dépôt des finesses des règles arithmétiques), traite des sciences exactes et sert encore au collège d'astronomie de Péking. Il est divisé en deux sections principales : la première traite de l'origine des nombres ; on raconte comment Fohi vit sortir de la rivière Jaune un dragon portant sur son dos le système décimal. Un dessin reproduit cet événement, suivi d'un autre dessin qui représente une tortue sortant du fleuve Lo et sur la carapace est figuré ce système décimal, qui se montre à l'éminent philosophe Yu. Cette première partie est terminée par l'ouvrage *Tshan-pi*, mentionné ci-dessus. Les trois parties suivantes sont en XII livres avec une introduction à la géométrie, mais moins claire, moins *solide* que celle d'Euclide. On y expose ce qui est nécessaire sur les surfaces et sur les corps de diverses formes. Dans le dernier livre on parle des proportions et on donne des plans et des projections pour la confection des coupes et dessins. La cinquième partie comprend ce qu'on pourrait appeler *l'arithmétique en figures* ; la théorie des calculs est exposée par principes et éclaircie par des figures et des exemples. La seconde section principale traite en quarante chapitres de l'application de l'arithmétique et contient cinq divisions. La première, en deux chapitres, servant d'introduction, contient des tables de poids et mesures, des règles pour les quatre opérations et les fractions. La seconde division, en huit chapitres, traite des

lignes, des proportions, des progressions, de la règle d'alliage, de la règle de société, des profits et pertes et des équations. La troisième, en huit chapitres, s'occupe de calculs de la surface des corps, de l'extraction des racines carrées, de l'ancienne et de la nouvelle trigonométrie, de l'usage des huit lignes trigonométriques, de la méthode pour déterminer les côtés d'un triangle, de la mesure des figures rectilignes ou curvilignes, des segments circulaires et des polygones réguliers. La quatrième section, en huit chapitres, contient ce qui concerne les valeurs, l'extraction de la racine cubique, la mesure des polyèdres et des surfaces courbes, des sphères et des segments sphériques, les poids de diverses substances du règne animal, végétal ou minéral; enfin les Tas. La cinquième division, en dix chapitres, comprend des dissertations sur l'algèbre, sur diverses questions y relatives, sur les logarithmes et l'usage des secteurs; il y a, en outre, huit volumes supplémentaires avec des Tables.

Les deux premiers volumes donnent le calcul des sinus, cosinus, tangentes, cotangentes, jusqu'au 90° degré. Le troisième et le quatrième volume contiennent les diviseurs de tous les nombres de 1 à 100 000, pour faciliter le calcul par logarithmes. A la fin de chaque série de dix mille, on donne la liste des nombres premiers. Le cinquième et le sixième volume contiennent les logarithmes des nombres de 1 à 100 000 avec dix décimales qui sont évidemment une copie des Tables de Vlacq, imprimées en Hollande en 1628. A la fin on trouve des règles pour calculer les logarithmes des nombres plus grands que 100 000 et une Table des pesanteurs spécifiques de diverses substances. Le septième et le huitième volume sont des Tables de logarithmes de sinus, cosinus, tangentes, cotangentes, sécantes, cosécantes de 0° à 90°.

Le style de cette encyclopédie est clair, populaire, et

destiné à être lu et compris par tous les Chinois instruits.

Les Chinois s'attribuent la découverte des logarithmes. Du moins un mathématicien, nommé Le-scheu-lan, vivant aujourd'hui à Schang-hai, dans son ouvrage *Tay-suh-tan-yuen* (Découverte de l'origine des logarithmes), dit qu'il possède une méthode pour calculer les logarithmes par des considérations géométriques et qui n'est pas connue des Européens. Un mandarin, nommé Ta-heu, est aussi occupé à Hang-tschau à publier une nouvelle manière de calculer les logarithmes.

A ce qu'on apprend, les sciences tendent à prendre un nouvel essor en Chine. L'anti-empereur, qui réside à Nanking, a ordonné le rétablissement des examens annuels des jeunes étudiants, qui avaient été supprimés; il est savant lui-même et on peut espérer qu'il protégera la culture des sciences.