NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solution analytique de la question 632

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 51-52

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__51_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 632;

PAR M. L. P.,
Elève du lycee Saint-Louis (classe de M Briot).

Considérons l'un des trois angles dont les côtés réunissent deux à deux quatre points A, B, C, D donnés sur un plan, et cherchons, par rapport aux côtés de cet angle, la conjuguée harmonique de la droite menée de son sommet à un point M du même plan.

Nous exprimerons que cette conjuguée et les deux autres droites analogues sont parallèles, et nous serons conduits, comme conclusion, au théorème (632).

Il suffit évidemment d'écrire que deux quelconques de ces droites sont parallèles.

Je prends pour axes des coordonnées x, y deux côtés opposés AB, CD du quadrilatère ABCD; ces deux côtés se coupent en un point O qui sera l'origine.

Les deux autres côtés opposés AC, BD se rencontrent en un point O'; et si l'on désigne par a, a', b, b' les distances OA, OB, OC, OD, les côtés O'CA, O'DB de l'angle O' auront pour équations

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)=0,\quad \left(\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}-1\right)=0.$$

Soient x_1, y_1 les coordonnées de M, l'équation de la conjuguée harmonique de OM, par rapport aux axes OX, OY, est

$$(1)\qquad y_1x+x_1y=0 \quad (*).$$

(*) Deux conjuguées harmoniques par rapport aux deux côtes d'un angle sont des diamètres conjugues de la ligne formée du système des

La conjuguée harmonique de O′M, par rapport aux côtés de l'angle O′, a pour équation

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)\left(\frac{x_1}{a'}+\frac{y_1}{b'}-1\right)\\ &+\left(\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}-1\right)\left(\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}-1\right)=0 \quad (^*).\end{aligned}\right.$$

La condition du parallélisme de ces deux droites est

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\frac{1}{a}\left(\frac{x_1}{a'}+\frac{y_1}{b'}-1\right)+\frac{1}{a'}\left(\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}-1\right)}{y_1}\\ &=\frac{\frac{1}{b}\left(\frac{x_1}{a'}+\frac{y_1}{b'}-1\right)+\frac{1}{b'}\left(\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}-1\right)}{x_1},\end{aligned}\right.$$

ou, en réduisant,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}-1\right)\left(\frac{x_1}{a'}-\frac{y_1}{b'}\right)\\ &+\left(\frac{x_1}{a'}+\frac{y_1}{b'}-1\right)\left(\frac{x_1}{a}-\frac{y_1}{b}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

L'équation (3) ou (4) est précisément celle du lieu géométrique des centres des coniques passant par les quatre points donnés, en considérant x_1, y_1 comme des cordonnées variables. Donc les centres de ces coniques jouissent de la propriété énoncée, et ce sont les seuls points qui en jouissent.

La proposition 632 est, par conséquent, démontrée.

---

deux côtés de l'angle. Il en résulte que si l'on prend ces côtés pour axes de coordonnées, la somme des coefficients angulaires des deux conjuguées harmoniques sera nulle.

(*) En général, si $M=0$, $N=0$ sont les équations des deux côtés d'un angle et $M+\gamma N=0$ l'équation d'une droite quelconque menée par son sommet, la conjuguée harmonique de cette droite par rapport aux côtés de l'angle aura pour équation $M-\gamma N=0$. On le voit facilement en prenant pour axes les deux côtés de l'angle. G.