NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ABRAHAM SCHNÉE

Question 560

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 513-514

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__513_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

QUESTION 560;

SOLUTION DE M. ABRAHAM SCHNÉE,
Élève du lycée Charlemagne.

ÉNONCÉ. — *Étant donnés un triangle conjugué à une conique et un cercle circonscrit au triangle, le produit des distances du centre de la conique aux côtés du triangle, multiplié par le diamètre du cercle circonscrit, est égal au produit des carrés des demi-axes de la conique.* (FAURE.)

Soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ les trois côtés du triangle donné que je prends pour triangle de référence; ce triangle sera conjugué à la conique

$$l\alpha^2 + m\beta^2 + n\gamma^2 = 0.$$

Si l'on pose, conformément à la notation du Mémoire (p. 289 du tome II, 2e série) :

$$\nabla = \begin{vmatrix} a & l & 0 & 0 \\ b & 0 & m & 0 \\ c & 0 & 0 & n \\ 0 & a & b & c \end{vmatrix},$$

où a, b, c sont les longueurs des trois côtés du triangle de référence, et

$$\Delta = \begin{vmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & n \end{vmatrix};$$

les distances du centre de la conique aux côtés du triangle seront données par les formules (*voir* le Mémoire cité) :

$$\alpha' = \frac{S}{\nabla}\frac{d\nabla}{da},$$

$$\beta' = \frac{S}{\nabla}\frac{d\nabla}{db},$$

$$\gamma' = \frac{S}{\nabla}\frac{d\nabla}{dc},$$

où S est la surface du triangle de référence.

Le produit des carrés des demi-axes principaux de la conique est donné (*voir* le même Mémoire) par la formule

$$\mathcal{A}^2\mathcal{B}^2 = \frac{a^4 b^4 c^4}{4R^2}\frac{\Delta^2}{\nabla^3},$$

où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle; mais on a

$$2R = \frac{abc}{2S},$$

ce qui réduit l'expression à

$$(2S)^2 a^2 b^2 c^2 \frac{\Delta^2}{\nabla^3}.$$

Cela posé, il s'agit de prouver que

$$\frac{abc}{2S}\frac{S^3}{\nabla^3}\frac{d\nabla}{da}\frac{d\nabla}{db}\frac{d\nabla}{dc} = (2S)^2 a^2 b^2 c^2 \frac{\Delta^2}{\nabla^3},$$

ou, en réduisant, que

$$\frac{d\nabla}{da}\frac{d\nabla}{db}\frac{d\nabla}{dc} = 8abc.\Delta^2.$$

Or, on a

$$\nabla = a^2 mn + b^2 nl + c^2 lm, \quad \Delta = lmn,$$

$$\frac{d\nabla}{da} = 2amn, \quad \frac{d\nabla}{db} = 2bnl, \quad \frac{d\nabla}{dc} = 2clm,$$

et la substitution donne une identité.