Nouvelles annales de mathématiques

A. Mogni

Théorèmes de M. Paul Serret. Démonstration du théorème V

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 504-508

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__504_0>

THEORÈMES DE M. PAUL SERRET

(voir 2e serie, t. Ier, p. 324).

Démonstration du théorème V (*);

PAR M. A. MOGNI,
Professeur de Mathématiques (Tortone).

ÉNONCÉ. — *Soient une spirale logarithmique, une corde mobile vue de l'origine sous un angle constant, et le pôle de cette corde par rapport à la spirale, ou le point de concours des tangentes à la courbe menées par les extrémités de la corde : l'enveloppe de la corde mobile et la ligne décrite par le pôle sont deux spirales logarithmiques. Le sommet d'un angle constant circonscrit à une spirale logarithmique décrit de même une spirale.*

1. Soient (ρ_0, θ_0), (ρ_1, θ_1) les coordonnées polaires des points M, N d'une spirale logarithmique dont l'équation est

$$\rho = ae^{m\theta};$$

l'équation en coordonnées polaires d'une droite passant par M et N est donnée par

$$\text{(A)} \qquad \rho = \frac{\rho_0\rho_1 \sin(\theta_1 - \theta_0)}{\rho_0 \sin(\theta - \theta_0) - \rho_1 \sin(\theta - \theta_1)},$$

et observant que l'on a

$$\rho_0 = ae^{m\theta_0}, \quad \rho_1 = ae^{m\theta_1},$$

(*) Ce théorème n'est pas compris au nombre de ceux qui ont été démontrés par M. Nicolaïdès (2e série, t. Ier, p. 464).

l'équation (A) devient

$$(B)\qquad \rho = \frac{ae^{m(\theta_1+\theta_0)}\sin(\theta_1-\theta_0)}{e^{m\theta_0}\sin(\theta-\theta_0)-e^{m\theta}\sin(\theta-\theta_1)}.$$

Maintenant, si l'on veut que la corde MN soit vue de l'origine O sous un angle constant k, il faut poser

$$\theta_1-\theta_0=k.$$

Avec cette relation, éliminant θ_1 de l'équation (B), on a

$$(C)\qquad \rho = \frac{ae^{m(\theta_0+k)}\sin k}{\sin(\theta-\theta_0)-e^{mk}\sin(\theta-\theta_0-k)}.$$

Prenant la dérivée de l'équation (C) par rapport à θ_0 et égalant cette dérivée à zéro, on a, après quelques développements et réductions faciles,

$$m\sin(\theta-\theta_0)-me^{mk}\cos k\sin(\theta-\theta_0)$$
$$+me^{mk}\sin k\cos(\theta-\theta_0)+\cos(\theta-\theta_0)-e^{mk}\cos k\cos(\theta-\theta_0)$$
$$-e^{mk}\sin k\sin(\theta-\theta_0)=0,$$

d'où

$$\operatorname{tang}(\theta-\theta_0)=\frac{e^{mk}\cos k-me^{mk}\sin k-1}{m-e^{mk}\sin k-me^{mk}\cos k}.$$

Pour tang $(\theta-\theta_1)$, on aurait obtenu

$$\operatorname{tang}(\theta-\theta_1)=\frac{e^{-mk}\cos k+me^{-mk}\sin k-1}{m+e^{-mk}\sin k+me^{-mk}\cos k}.$$

Les valeurs de $\theta-\theta_0$, $\theta-\theta_1$ étant constantes, je pose

$$\theta-\theta_0=\alpha,\quad \theta-\theta_1=\beta.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (B), on a pour l'équation de l'enveloppe de la corde mobile MN

$$\rho=\frac{a\sin(\alpha-\beta)}{e^{m\beta}\sin\alpha-e^{m\alpha}\sin\beta}\,e^{m\theta},$$

équation d'une spirale logarithmique semblable à la première, semblablement placée, le rapport de similitude étant $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{e^{m\beta}\sin\alpha - e^{m\alpha}\sin\beta}$.

2. Menons par le point M une tangente à la spirale logarithmique dont l'équation est toujours $\rho = ae^{m\theta}$. Observant que dans cette courbe la tangente est toujours également inclinée sur le rayon vecteur du point de contact, et que la tangente de cette inclinaison est donnée par $\frac{1}{m}$, on a, pour l'équation de la tangente au point M dont les coordonnées sont ρ_0, θ_0,

$$\rho = \frac{\rho_0}{m\sin(\theta-\theta_0)+\cos(\theta-\theta_0)},$$

d'où

$$\text{(D)} \qquad \rho = \frac{ae^{m\theta_0}}{m\sin(\theta-\theta_0)+\cos(\theta-\theta_0)},$$

et, pour l'équation de la tangente au point N dont les coordonnées sont ρ_1, θ_1,

$$\text{(E)} \qquad \rho = \frac{ae^{m\theta_1}}{m\sin(\theta-\theta_1)+\cos(\theta-\theta_1)}.$$

On obtiendra la ligne décrite par le pôle de la corde MN, vue de l'origine sous un angle constant k, en éliminant θ_0, θ_1 entre les équations (D), (E) et la relation

$$\theta_1 - \theta_0 = k.$$

Si l'on divise membre à membre l'équation (E) par l'équation (D), on obtient

$$ae^{mk}[m\sin(\theta-\theta_0)+\cos(\theta-\theta_0)] = m\sin(\theta-\theta_1)+\cos(\theta-\theta_1)$$

et aussi

$$ae^{mk}[m\sin(\theta-\theta_0)+\cos(\theta-\theta_0)]$$
$$= m\sin(\theta-\theta_0-k)+\cos(\theta-\theta_0-k).$$

Développant et réduisant, on trouve

$$\operatorname{tang}(\theta - \theta_0) = \frac{ae^{mk} + m\sin k - \cos k}{\sin k + m\cos k - mae^{mk}}.$$

Pour tang $(\theta - \theta_1)$, on aurait trouvé

$$\operatorname{tang}(\theta - \theta_1) = \frac{mae^{mk}\sin k + ae^{mk}\cos k - 1}{ae^{mk}\sin k - mae^{mk}\cos k + m}.$$

Comme dans le cas précédent, on obtient des valeurs constantes pour $\theta - \theta_0$, $\theta - \theta_1$. Posant donc

$$\theta - \theta_0 = \alpha_1,$$

et substituant dans l'équation (D), on obtient pour l'équation du lieu cherché

$$\rho = \frac{a}{me^{m\alpha_1}\sin\alpha_1 + e^{m\alpha_1}\cos\alpha_1}\, e^{m\theta},$$

équation d'une spirale logarithmique semblable à la proposée.

3. Soient T le point de concours des tangentes aux points M et N, O l'origine. Dans le quadrilatère OMNT les angles en M et N sont constants par une propriété de la courbe. Donc, si l'angle T est constant, il en est de même de l'angle NOM. Donc le sommet d'un angle constant circonscrit à une spirale logarithmique décrit une spirale de la même espèce.

4. L'angle formé par les tangentes en M et N étant constant, si l'on mène par les mêmes points des normales à la courbe, l'angle des normales sera constant.

Le lieu décrit par le point de concours des normales est une spirale logarithmique semblable à la première.

Les équations des normales aux points M et N sont données par

$$\rho = \frac{mae^{m\theta_0}}{\sin(\theta - \theta_0) + m\cos(\theta - \theta_0)},$$

$$\rho = \frac{mae^{m\theta_1}}{\sin(\theta - \theta_1) + m\cos(\theta - \theta_1)}.$$

Le calcul s'achève comme dans le cas des tangentes.

5. Il est évident que le point de concours des normales se trouve sur une même circonférence avec l'origine O, le point de concours des tangentes, le point M et le point N. On peut démontrer que le centre de cette circonférence décrit une spirale logarithmique lorsqu'on fait mouvoir la corde MN vue de l'origine sous un angle constant.

On détermine le centre par le point de concours de deux perpendiculaires menées aux milieux des rayons vecteurs OM, ON. Les équations des perpendiculaires sont

$$\rho = \frac{\rho_0}{2\cos(\theta - \theta_0)} = \frac{ae^{m\theta_0}}{2\cos(\theta - \theta_0)},$$

$$\rho = \frac{\rho_1}{2\cos(\theta - \theta_1)} = \frac{ae^{m\theta_1}}{2\cos(\theta - \theta_1)}.$$

Le calcul s'achève comme dans le cas des tangentes.

Si l'on cherche l'enveloppe de cette circonférence, on trouve de même une spirale logarithmique.