

J.-J.-A. MATHIEU

**Recherche des axes d'une conique sur
un plan et dans l'espace**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 473-478

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_473_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**RECHERCHE DES AXES D'UNE CONIQUE SUR UN PLAN
ET DANS L'ESPACE;**

PAR M. J.-J.-A. MATHIEU,
Capitaine d'artillerie.

Je donne dans cet article un moyen pour trouver les axes d'une conique, sans recourir à la transformation des coordonnées.

La méthode consiste à décrire du centre de la conique un cercle de rayon ρ , à chercher l'équation des diagonales du rectangle déterminé par les points d'intersection des deux courbes, et à exprimer que les deux courbes sont tangentes, en exprimant que ces diagonales se confondent. On trouve ainsi une équation bicarrée en ρ , qui a pour racines les longueurs des demi-axes de la conique.

§ 1^{er}. — *Conique sur un plan.*

Les axes coordonnés sont quelconques. Écrivons :

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

équation de la conique; θ angle des axes coordonnés;
 $x'y'$ coordonnées du centre;

$$\varphi = \frac{Dy' + Ex' + 2F}{2} = \frac{\overline{AE}^2 + \overline{CD}^2 - BDE + F(B^2 - 4AC)}{B^2 - 4AC},$$

résultat de la substitution de x', y' à x, y dans l'équation.

L'origine étant transportée au centre de la conique, on a :

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + \varphi = 0,$$

équation de la conique;

$$y^2 + 2xy \cos \theta + x^2 - \rho^2 = 0,$$

équation du cercle ;

$$y^2(A\rho^2 + \varphi) + xy(B\rho^2 + 2\varphi \cos \theta) + x^2(C\rho^2 + \varphi) = 0,$$

équation des diagonales, immédiatement déduite des deux équations précédentes ;

$$(B\rho^2 + 2\varphi \cos \theta)^2 - 4(A\rho^2 + \varphi)(C\rho^2 + \varphi) = 0,$$

condition de contact des deux courbes.

Cette dernière équation, ordonnée par rapport à ρ , devient

$$(1) \quad \rho^4(B^2 - 4AC) - 4\rho^2(A + C - B \cos \theta)\varphi - 4\varphi^2 \sin^2 \theta = 0.$$

Si k représente le coefficient angulaire d'un axe, k sera la valeur du rapport $\frac{y}{x}$, tiré de l'équation des diagonales confondues ; on aura donc

$$k = - \frac{B\rho^2 + 2\varphi \cos \theta}{A\rho^2 + \varphi}.$$

L'élimination de ρ^2 entre cette relation et l'équation (1) conduit à l'équation aux coefficients angulaires des axes :

$$(2) \quad k^2(B - 2A \cos \theta) - 2k(A - C) - (B - 2C \cos \theta) = 0.$$

Cercle. — La condition, pour que les carrés des demi-axes soient égaux et de même signe, sera, d'après l'équation (1),

$$(A + C - B \cos \theta)^2 + (B^2 - 4AC) \sin^2 \theta = 0 ;$$

mais cette condition se transforme facilement en la suivante :

$$(A - C)^2 \sin^2 \theta + [B - (A + C) \cos \theta]^2 = 0,$$

laquelle entraîne

$$A = C, \quad B = 2A \cos \theta.$$

Telle est la vérification fournie par l'analyse, vérification déjà signalée par M. Gerono dans ce journal, de ce fait qu'il ne faut que trois conditions pour déterminer l'ellipse équilatère ou le cercle, tandis qu'il en faut quatre pour déterminer l'hyperbole équilatère.

Hyperbole équilatère. — La condition, pour que les carrés des demi-axes soient égaux et de signes contraires, sera, d'après l'équation (1),

$$A + C - B \cos \theta = 0.$$

Considérons les hyperboles équilatères circonscrites à un triangle ayant les côtés p et q et l'angle compris θ . Il est facile de voir que l'équation générale de ces hyperboles peut recevoir la forme

$$Ay^2 + xy + Cx^2 - Agy - Cpx = 0;$$

avec la condition

$$A + C - \cos \theta = 0.$$

On déduit bien facilement de là que toutes ces hyperboles se coupent en un point fixe, point d'intersection des hauteurs du triangle, et que le lieu des centres de ces hyperboles est un cercle.

Ces conséquences méritent d'être développées.

1. On vient de voir que les hyperboles équilatères qui passent par trois points se coupent en un quatrième point fixe : ceci implique forcément une relation de positions, entre chaque point et les trois autres, qui ne change pas avec le point que l'on considère. Les trois sommets d'un triangle et le point de concours des hauteurs forment en effet un système de quatre points jouissant de cette pro-

priété que l'un quelconque des quatre est le point de concours des hauteurs du triangle formé par les trois autres.

2. Le lieu des centres des hyperboles équilatères passant par trois points, qui est, d'après ce que nous avons dit, un cercle, se confondra avec le lieu des centres des coniques passant par quatre points placés dans les conditions énoncées.

3. On sait qu'en général le lieu des centres des coniques passant par quatre points est une ligne du second ordre passant par neuf points qui sont : les milieux des six droites qui joignent les quatre points deux à deux et les trois sommets du triangle qui dérive du quadrilatère, c'est-à-dire les trois points d'intersection des trois systèmes de droites qui passent par les quatre points.

4. Il résulte évidemment des théorèmes précédents que : les trois sommets d'un triangle et le point de concours des hauteurs forment un système de quatre points jouissant de cette propriété que les milieux des six droites qui les joignent deux à deux sont sur le cercle circonscrit au triangle dérivé du quadrilatère des quatre points ; ce cercle étant le lieu des centres des hyperboles équilatères, en nombre infini, qui passent par quatre points placés dans les conditions énoncées.

5. Quatre points, donnés au hasard sur un plan, déterminent en général une hyperbole équilatère et quatre triangles. Les quatre points de concours des hauteurs de ces triangles sont sur l'hyperbole équilatère, et les quatre cercles des neuf points de ces triangles se coupent en un même point, centre de l'hyperbole.

Parabole. — Je donnerai ici le moyen de trouver le paramètre de la parabole représentée par l'équation générale.

Avant de supposer

$$B^2 - 4AC = 0,$$

faisons

$$B^2 - 4AC = 4\alpha, \quad A + C - B \cos \theta = 2\beta;$$

l'équation (1) deviendra

$$\rho^4 \alpha - 2\rho^2 \beta \varphi - \varphi^3 \sin^2 \theta = 0,$$

d'où

$$\frac{b^2}{a} = \sqrt{\frac{\varphi}{\alpha} \cdot \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + \alpha \sin^2 \theta}}{\sqrt{\beta + \sqrt{\beta^2 + \alpha \sin^2 \theta}}}}.$$

Par un calcul facile, on trouve à la limite, pour $\alpha = 0$,

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{(\overline{AE}^2 + \overline{CD}^2 - BDE)^{\frac{1}{2}} \sin^2 \theta}{2(A + C - B \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

§ II. — Conique dans l'espace.

Les axes coordonnés sont rectangulaires. Écrivons :

$$\begin{aligned} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0, \end{aligned}$$

équation d'une surface du second degré;

$$mx + ny + pz - 1 = 0,$$

équation du plan sécant: x' , y' , z' , coordonnées du centre de la section; φ , $\varphi'_{x'}$, $\varphi'_{y'}$, $\varphi'_{z'}$, résultats de la substitution de x' , y' , z' à x , y , z dans le premier membre de l'équation et dans ses dérivées.

Les coordonnées du centre de la section sont données par le système d'équations du premier degré

$$\begin{cases} mx' + ny' + pz' - 1 = 0, \\ p\varphi'_{x'} - m\varphi'_{z'} = 0, \\ p\varphi'_{y'} - n\varphi'_{z'} = 0. \end{cases}$$

L'origine étant transportée au centre, on a

$$\begin{aligned} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B\gamma z + 2B'xz + 2B''xy \\ + x\varphi'_{x'} + y\varphi'_{y'} + z\varphi'_{z'} + \varphi = 0, \\ mx + ny + pz = 0, \end{aligned}$$

équations de la conique; et

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2 = 0, \\ mx + ny + pz = 0, \end{aligned}$$

équations du cercle.

On déduit de là les équations des projections des deux courbes sur le plan des xy , puis l'équation des diagonales du parallélogramme formé par les quatre points d'intersection de ces deux projections. En exprimant que les deux diagonales se confondent, on exprime que les deux projections sont tangentes et, par conséquent, que le cercle et la conique le sont aussi. On arrive de la sorte à l'équation bicarrée en ρ que voici :

$$\begin{aligned} \rho^4 [m^2(B^2 - A'A'') + n^2(B'^2 - AA'') \\ + p^2(B''^2 - AA') + 2mn(A'B'' - BB') \\ + 2mp(A'B' - BB'') + 2np(AB - B'B'')] \\ - \rho^2 [m^2(A' + A'') + n^2(A + A'') + p^2(A + A') \\ - 2mnB'' - 2mpB' - 2npB] \varphi \\ - [m^2 + n^2 + p^2] \varphi^2 = 0. \end{aligned}$$