

Question 641

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 456-457

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_456_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTION 641 ;**SOLUTION DE M. A. G.,**

Élève en Mathématiques élémentaires (Rhétorique scientifique).

Démontrer la relation

$$\begin{aligned} & \cos(a+b+c) \cos(a+b-c) \cos(a+c-b) \cos(b+c-a) \\ & - 4 \cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c \\ = & - (\cos a + \cos b + \cos c) (\cos a + \cos b - \cos c) \\ & \times (\cos a + \cos c - \cos b) (\cos b + \cos c - \cos a). \end{aligned}$$

(CATALAN.)

On a

$$\begin{aligned} & (\cos a + \cos b + \cos c) (\cos a + \cos b - \cos c) \\ = & 2 \cos a \cos b + (\cos^2 a + \cos^2 b - \cos^2 c) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & (\cos a + \cos c - \cos b) (\cos b + \cos c - \cos a) \\ = & 2 \cos a \cos b - (\cos^2 a + \cos^2 b - \cos^2 c). \end{aligned}$$

Multipliant membre à membre les égalités précédentes et nommant P le premier membre de l'égalité résultant de cette multiplication, il vient

$$\begin{aligned} P = & 2 \cos^2 a \cos^2 b + 2 \cos^2 a \cos^2 c + 2 \cos^2 b \cos^2 c \\ & - \cos^4 a - \cos^4 b - \cos^4 c. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\cos(a+b+c) \cos(a+b-c) = \cos^2(a+b) + \cos^2 c - 1$$

et

$$\cos(a+c-b) \cos(b+c-a) = \cos^2(a-b) + \cos^2 c - 1.$$

La multiplication de ces deux dernières égalités donne,

(457)

en nommant P' le produit des quatre facteurs des premiers membres,

$$\begin{aligned} P' &= [\cos(a+b)\cos(a-b)]^2 + [\cos^2(a+b) + \cos^2(a-b)] \\ &\quad \times (\cos^2 c - 1) + (\cos^2 c - 1)^2 \\ &= (\cos^2 a + \cos^2 b - 1)^2 + (4\cos^2 a \cos^2 b - 2\cos^2 a - 2\cos^2 b + 2) \\ &\quad \times (\cos^2 c - 1) + (\cos^2 c - 1)^2; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} P' &= \cos^4 a + \cos^4 b + \cos^4 c - 2\cos^2 a \cos^2 b - 2\cos^2 a \cos^2 c \\ &\quad - 2\cos^2 b \cos^2 c + 4\cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c; \end{aligned}$$

donc

$$P' - 4\cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c = -P.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.