GÉRONO

Note sur l'article précédent

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 411-413

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__411_0>

NOTE SUR L'ARTICLE PRÉCÉDENT.

Si les résultats du calcul de M. Housel sont en contradiction avec les théorèmes énoncés (t. XVII, p. 242), cela tient à ce que, dans les énoncés de ces théorèmes, on a confondu les plans osculateurs aux deux lignes de courbure passant par un point de l'ellipsoïde avec les plans des deux sections normales principales, en ce point; la démonstration elle-même de M. Dewulf (t. XVIII, p. 46) le prouve, car les plans tangents aux deux hyperboloïdes considérés dans cette démonstration sont précisément les plans de deux sections normales principales de l'ellipsoïde. C'est ce qui résulte assez clairement de la proposition suivante :

Deux surfaces du second degré homofocales et d'espèces différentes se coupent partout à angle droit, et leur intersection est une ligne de courbure pour chacune d'elles (*).

Ainsi, les deux hyperboloïdes homofocaux à l'ellipsoïde et passant par un point M de sa surface coupent l'ellipsoïde suivant deux lignes de courbure; les tangentes MA, MB à ces deux lignes sont rectangulaires, et déterminent le plan tangent à l'ellipsoïde, en M; la normale MC à la surface appartient à la fois aux deux plans qui touchent les deux hyperboloïdes au point M; en outre, ces deux plans passent, l'un par MA et l'autre

(*) Peut-être n'est-il pas inutile de rappeler que cette importante proposition est due à M. Ch. Dupin. On en trouve la démonstration dans l'ouvrage publié en 1813 sous ce titre : *Développements de Géométrie*. Le même ouvrage fait connaître le moyen de décrire par un mouvement continu les lignes de courbure des surfaces du second degré.

par MB : ils coïncident, par conséquent, avec les plans des deux sections normales principales de l'ellipsoïde, au point M de sa surface.

D'où il faut conclure que la proposition démontrée par M. Dewulf est celle-ci :

Les plans de deux sections normales principales en un point quelconque de l'ellipsoïde coupent le grand axe de la surface en des points tels, que le produit de leurs distances au centre est invariable.

La valeur de ce produit est $\frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{a^2}$, en nommant $2a$, $2b$, $2c$ les trois axes, et supposant $a > b > c$.

Si l'on prend sur le grand axe, de chaque côté du centre, des longueurs égales à $\frac{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}{a}$, on aura deux points F, F', qu'on a nommés *points focaux*.

L'énoncé du second théorème (t. XVII, p. 242) donne lieu à la même rectification. Conformément à la démonstration de M. Dewulf (t. XVIII, p. 48), il faut dire :

Si, par les points focaux F, F' *et par une normale en un point quelconque* M *de l'ellipsoïde, on fait passer deux plans, les angles qu'ils forment entre eux sont divisés en parties égales par les plans des sections normales principales, en ce point.*

Il s'ensuit que les deux plans normaux menés par un point quelconque M de l'ellipsoïde et par les points F, F', coupent la surface suivant deux ellipses qui ont au point M des rayons de courbure égaux.

A l'égard des autres théorèmes mentionnés (t. XVII, p. 242), il n'y a aucun motif pour modifier leurs énoncés, ni pour douter de leur exactitude. Plusieurs d'entre eux se vérifient sans la moindre difficulté. Par exemple :

Les normales à l'ellipsoïde menées par les ombilics coupent le grand axe aux deux points focaux. Il est facile de s'en assurer, puisque l'on connaît les coordonnées des ombilics et des points focaux.

Deux sphères qui ont pour rayons ces normales, et pour centres les points focaux, sont égales, et touchent l'ellipsoïde aux ombilics. C'est là une conséquence de la proposition précédente.

Ces deux sphères ont été nommées *sphères focales*.

Pour tous les points d'une ligne de courbure de l'ellipsoïde, et selon que cette ligne appartient à l'un ou l'autre des deux systèmes, la somme ou la différence des tangentes menées aux deux sphères focales est constante.

Cette proposition a été démontrée par M. Valson, et la démonstration qu'il en a donnée, au moyen des coordonnées elliptiques, n'est pas moins remarquable que le théorème qu'elle a pour objet. G.