

HOUSEL

**Plan osculateur à l'intersection de deux surfaces homofocales**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 2 (1863), p. 400-410

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1863\\_2\\_2\\_400\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_400_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**PLAN OSCULATEUR A L'INTERSECTION DE DEUX SURFACES  
HOMOFOCALES;**

PAR M. HOUSEL,  
Professeur.

---

On trouve, au tome XVII des *Nouvelles Annales*, p. 242 et 243, différentes propositions énoncées par M. Heilermann sur les surfaces du second degré. M. Valsen, dans la thèse qu'il avait soutenue en 1854, les avait de son côté obtenues et même démontrées, excepté la première que voici :

Par un point quelconque d'un ellipsoïde passent deux lignes de courbure et deux plans osculateurs à ces lignes; ces plans coupent le grand axe en deux points P et Q: prenons sur ce même axe deux points F et F' à égale

distance du centre O, tels que les quatre points F, P, Q, F' forment une relation *harmonique*; les points F et F' sont *fixes*, quel que soit le point de l'ellipsoïde.

Ce théorème nous semble inexact.

Cependant M. Dewulf a cherché à le démontrer (*Nouvelles Annales*, t. XVIII, p. 46); mais sa démonstration est fondée sur le théorème suivant, qu'il se contente d'énoncer et qui nous paraît également douteux :

*Le plan osculateur à l'intersection d'un ellipsoïde par un hyperboloïde homofocal est tangent à cet hyperboloïde.*

S'il en était ainsi, il semble que ce plan devrait être aussi tangent à l'ellipsoïde, puisque l'intersection est à la fois une ligne de courbure des deux surfaces : ainsi, le long de cette ligne, ces surfaces auraient des plans tangents communs, ce qui est impossible, puisqu'elles se coupent à angle droit.

Quoi qu'il en soit, nous allons faire, par une méthode différente, les calculs qui seraient nécessaires pour vérifier, si cela était possible, le théorème de M. Heilermann : nous conserverons les notations de M. Dewulf.

I. Indiquons par

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a^2 - u^2} + \frac{y^2}{b^2 - u^2} + \frac{z^2}{c^2 - u^2} = 1$$

les équations d'un ellipsoïde et d'un hyperboloïde homofocaux passant par un même point dont les coordonnées sont  $x_1, y_1, z_1$ ; elles donneront, en les appliquant à ce point :

$$u^4 - u^2 (a^2 + b^2 + c^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2) + a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 - x_1^2 (b^2 + c^2) - y_1^2 (a^2 + c^2) - z_1^2 (a^2 + b^2) = 0.$$

Soient  $u_0^2, u_1^2$  les racines de cette équation, nous suppo-

serons que  $u^2$  est remplacé par l'une d'elles dans l'équation de l'hyperboloïde.

Il faut donc calculer la distance à laquelle l'axe  $Ox$  (nous n'avons pas besoin de supposer que ce soit le grand axe) est coupé par le plan osculateur correspondant à  $u^2 = u_0^2$  : nous allons d'abord faire ce calcul, non pas seulement pour le point donné, mais pour un point quelconque de la ligne de courbure, représenté par  $x, y, z$ .

On sait que l'équation du plan osculateur en ce point est

$$(dyd^2z - dzd^2y)(\xi - x) + (dzd^2x - dx d^2z)(\eta - y) \\ + (dxd^2y - dyd^2x)(\zeta - z) = 0;$$

mais prenons  $x$  pour variable indépendante, et posons  $\eta = 0, \zeta = 0$ , puisqu'il ne s'agit que de l'intersection du plan avec  $Ox$ ; il reste

$$\xi - x = \frac{yz'' - y'z''}{y'z'' - z'y''}.$$

II. Éliminons  $x^2$  entre les équations des surfaces, il vient

$$\frac{y^2(b^2 - a^2)}{b^2(b^2 - u^2)} + \frac{z^2(c^2 - a^2)}{c^2(c^2 - u^2)} = 1,$$

ou bien

$$z^2 = \lambda y^2 + \gamma,$$

en posant

$$\lambda = -\frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2} \cdot \frac{c^2 - u^2}{b^2 - u^2} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{c^2(c^2 - u^2)}{c^2 - a^2}.$$

En différentiant deux fois cette équation, on a

$$zz' = \lambda yy', \quad z'^2 + zz'' = \lambda (y'^2 + yy'').$$

Mais l'équation de l'ellipsoïde donne aussi

$$\frac{zz'}{c^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{x}{a^2} = 0, \quad \frac{z'^2 + zz''}{c^2} + \frac{y'^2 + yy''}{b^2} + \frac{1}{a^2} = 0;$$

par conséquent,

$$yy' \left( \frac{\lambda}{c^2} + \frac{1}{b^2} \right) = - \frac{x}{a^2};$$

et si nous posons

$$b^2 \lambda + c^2 = \frac{1}{\rho},$$

il reste

$$y' = - \frac{b^2 c^2 \rho x}{a^2 y},$$

ainsi que

$$z' = - \frac{\lambda b^2 c^2 \rho x}{a^2 z};$$

on aura de même

$$\frac{y'^2 + yy''}{b^2 c^2 \rho} = - \frac{1}{a^2} \quad \text{et} \quad \frac{z'^2 + zz''}{b^2 c^2 \rho} = - \frac{\lambda}{a^2}.$$

De là on tire

$$y'' = - \frac{b^2 c^2 \rho (a^2 y^2 + b^2 c^2 \rho x^2)}{a^4 y^3},$$

$$z'' = - \frac{\lambda b^2 c^2 \rho (a^2 z^2 + \lambda b^2 c^2 \rho x^2)}{a^4 z^3}$$

Substituant toutes ces expressions dans la valeur de  $\xi - x$ , supprimant le facteur  $-\frac{b^2 c^2 \rho}{a^4}$ , commun à  $y''$  et à  $z''$ , et ayant égard à ce que  $y'$  et  $z'$  ont aussi le signe  $-$ , on trouve

$$\begin{aligned} \xi - x &= \frac{z}{y^2} (a^2 y^2 + b^2 c^2 \rho x^2) - \frac{\lambda y}{z^3} (a^2 z^2 + \lambda b^2 c^2 \rho x^2) \\ &= \frac{b^2 c^2 \rho x}{a^2} \left[ \frac{\lambda (a^2 y^2 + b^2 c^2 \rho x^2)}{zy^2} - \frac{\lambda (a^2 z^2 + \lambda b^2 c^2 \rho x^2)}{yz^3} \right] \\ &= \frac{a^2 [z^4 (a^2 y^2 + b^2 c^2 \rho x^2) - \lambda y^4 (a^2 z^2 + \lambda b^2 c^2 \rho x^2)]}{\lambda b^2 c^2 \rho x [z^2 (a^2 y^2 + b^2 c^2 \rho x^2) - y^2 (a^2 z^2 + \lambda b^2 c^2 \rho x^2)]}; \end{aligned}$$

simplifiant dans le dénominateur, on a encore :

$$\xi - x = \frac{a^2 [\rho b^2 c^2 x^2 (z^4 - \lambda^2 y^4) + a^2 z^2 y^2 (z^2 - \lambda y^2)]}{\lambda b^4 c^4 \rho^2 x^3 (z^2 - \lambda y^2)}.$$

Enfin, supprimant un facteur commun, on a

$$\xi - x = \frac{a^2 [\rho b^2 c^2 x^2 (z^2 + \lambda y^2) + a^2 z^2 y^2]}{\lambda b^4 c^4 \rho^2 x^3}.$$

III. Il faut maintenant, dans cette expression, remplacer  $y$  et  $z$  en fonction de  $x$ . Les équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{et} \quad z^2 = \lambda y^2 + \gamma$$

donnent

$$a^2 y^2 = b^2 \rho (a^2 c^2 - c^2 x^2 - a^2 \gamma),$$

et il reste

$$\frac{(\xi - x) \lambda b^4 c^4 \rho^2 x^3}{a^2} = \rho b^2 c^2 x^2 (z^2 + \lambda y^2) + z^2 b^2 \rho (a^2 c^2 - c^2 x^2 - a^2 \gamma),$$

ou bien, en réduisant et supprimant le facteur commun  $b^2 \rho$ ,

$$\frac{(\xi - x) \lambda b^2 c^4 \rho x^3}{a^2} = \frac{c^2 x^2 \lambda b^2 \rho (a^2 c^2 - c^2 x^2 - a^2 \gamma)}{a^2} + z^2 (a^2 c^2 - a^2 \gamma);$$

supprimant un terme commun de part et d'autre, on a :

$$\frac{\xi \lambda b^2 c^4 \rho x^3}{a^2} = c^2 x^2 \lambda b^2 \rho (c^2 - \gamma) + (c^2 - \gamma) [a^2 \gamma + \lambda b^2 \rho (a^2 c^2 - c^2 x^2 - a^2 \gamma)].$$

Une nouvelle simplification donne encore

$$\frac{\xi \lambda b^2 c^4 \rho x^3}{a^4} = \gamma (c^2 - \gamma) + (c^2 - \gamma)^2 \lambda b^2 \rho.$$

IV. Parmi les quantités auxiliaires, nous nous proposons actuellement de ne plus garder que  $\rho$ . Pour cela, nous commencerons par résoudre, relativement à  $u^2$ ,

l'équation

$$\lambda = \frac{c^2 (a^2 - b^2) (u^2 - c^2)}{b^2 (c^2 - a^2) (u^2 - b^2)},$$

d'où l'on tire

$$u^2 = \frac{\lambda b^4 (c^2 - a^2) - c^4 (a^2 - b^2)}{\lambda b^2 (c^2 - a^2) - c^2 (a^2 - b^2)};$$

donc

$$c^2 - u^2 = \frac{\lambda b^2 (c^2 - a^2) (c^2 - b^2)}{\lambda b^2 (c^2 - a^2) - c^2 (a^2 - b^2)},$$

et

$$\gamma = \frac{c^2 (c^2 - u^2)}{c^2 - a^2} = \frac{\lambda b^2 c^2 (c^2 - b^2)}{\lambda b^2 (c^2 - a^2) - c^2 (a^2 - b^2)}.$$

Remplaçant d'abord  $\gamma$  par cette valeur dans la dernière fonction de  $\xi$ , nous aurons, en supprimant  $\lambda$  comme facteur commun,

$$\frac{\xi b^2 c^4 \rho x^3}{a^4} = \frac{b^2 c^2 (c^2 - b^2) (c^2 - \gamma)}{\lambda b^2 (c^2 - a^2) + c^2 (b^2 - a^2)} + b^2 \rho (c^2 - \gamma)^2.$$

Mais aussi

$$\lambda b^2 = \frac{1 - \rho c^2}{\rho};$$

substituant cette valeur, réduisant et supprimant  $b^2 \rho$  comme facteur commun, on aura

$$\frac{\xi c^4 x^3}{a^4} = \frac{c^2 (c^2 - b^2) (c^2 - \gamma)}{c^2 \rho (b^2 - c^2) + c^2 - a^2} + (c^2 - \gamma)^2.$$

V. Afin d'achever cette transformation, il faut aussi poser

$$\lambda b^2 = \frac{1 - c^2 \rho}{\rho}$$

dans la valeur de  $\gamma$  pour obtenir  $c^2 - \gamma$ ; on a

$$\gamma = \frac{c^2 (c^2 - b^2) (1 - \rho c^2)}{(c^2 - a^2)(1 - \rho c^2) - \rho c^2 (a^2 - b^2)} = \frac{c^2 (c^2 - b^2) - c^4 \rho (c^2 - b^2)}{c^2 - a^2 + c^2 \rho (b^2 - c^2)},$$

et

$$c' - \gamma = \frac{c^2(b^2 - a^2)}{c^2\rho(b^2 - c^2) + c^2 - a^2}.$$

Donc enfin,

$$\begin{aligned} \frac{\xi c' x^3}{a^4} &= \frac{c^2(b^2 - a^2)[c'(c^2 - b^2) + c^2(b^2 - a^2)]}{[c^2\rho(b^2 - c^2) + c^2 - a^2]^2} \\ &= \frac{c^4(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}{[c^2\rho(b^2 - c^2) + c^2 - a^2]^2}, \end{aligned}$$

et

$$\frac{\xi x^2}{a^4} = \frac{(b^2 - a^2)(c' - a^2)}{[c^2\rho(b^2 - c^2) + c^2 - a^2]^2}.$$

VI. On trouve ainsi la valeur de  $\xi$  en fonction de l'abscisse  $x$  d'un point quelconque de la ligne de courbure qui correspond à l'un des hyperboloïdes. Mais si ce point se confond avec le point fixe représenté par  $x_1, y_1, z_1$ , il faut considérer les deux lignes de courbure et les deux valeurs de  $\xi$  qui sont alors  $OP = \alpha$ ,  $OQ = \beta$ , l'une relative à  $u_0^2$ , l'autre à  $u_1^2$ , chaque valeur de  $u^2$  correspondant à une valeur de  $\rho$ .

M. Dewulf observe que le théorème de M. Heilermann exige que le produit  $\alpha\beta$  soit constant : nous reconnaitrons bientôt que cette constance n'existe pas, mais il sera facile de voir qu'elle serait en effet nécessaire pour la vérité du théorème.

Imaginons, dans l'ordre suivant, les points  $F', P, F, Q$  et le point  $O$  à égale distance de  $F$  et de  $F'$ ; posons

$$OF = OF' = \delta.$$

Si les quatre premiers points sont en division harmonique, on a

$$PF \cdot F'Q = PF' \cdot FQ,$$

ce qui revient à

$$(\delta - \alpha)(\delta + \beta) = (\delta + \alpha)(\beta - \delta);$$



par conséquent  $\delta^2 = \alpha\beta$ , et comme il s'agit de vérifier si  $\delta$  est constant, il faut calculer  $\alpha\beta$ .

Relativement à l'une des lignes de courbure, la dernière fonction de  $\xi$  donne pour le point fixe :

$$\frac{\alpha x_1^3}{a^4} = \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}{[c^2 \rho_0 (b^2 - c^2) + c^2 - a^2]^2};$$

l'autre ligne donne pour le même point

$$\frac{\beta x_1^3}{a^4} = \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}{[c^2 \rho_1 (b^2 - c^2) + c^2 - a^2]^2}.$$

Multipliant ces valeurs, on obtient

$$\frac{\delta x_1^3}{a^4} = \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}{c^4 \rho_0 \rho_1 (b^2 - c^2)^2 + c^2 (b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(\rho_0 + \rho_1) + (c^2 - a^2)^2}.$$

Il faut donc, pour calculer  $\rho_0 \rho_1$  et  $\rho_0 + \rho_1$ , obtenir l'équation en  $\rho$ ; pour cela, on pourrait exprimer  $u^2$  en fonction de  $\rho$  et transporter cette expression dans l'équation en  $u^2$ ; mais cette méthode serait pénible.

VII. Éliminant  $x$  entre les équations différentielles des deux surfaces, on a

$$\frac{b^2 - a^2}{b^2(b^2 - u^2)} + \frac{\lambda(c^2 - a^2)}{c^2(c^2 - u^2)} = 0.$$

Mais

$$\gamma = \frac{c^2(c^2 - u^2)}{c^2 - a^2} \quad \text{d'où} \quad \frac{b^2 - a^2}{b^2(b^2 - u^2)} + \frac{\lambda}{\gamma} = 0,$$

et l'on en tire aussi

$$b^2 - u^2 = \frac{c^2(b^2 - c^2) + \gamma(c^2 - a^2)}{c^2}.$$

On a donc

$$\frac{c^2(b^2 - a^2)}{b^2[c^2(b^2 - c^2) + \gamma(c^2 - a^2)]} + \frac{\lambda}{\gamma} = 0,$$

et comme

$$\gamma = z^2 - \lambda y^2,$$

il reste

$$\lambda^2 b^2 y^2 (c^2 - a^2) + \lambda [c^2 y^2 (b^2 - a^2) - b^2 c^2 (b^2 - c^2) - b^2 z^2 (c^2 - a^2)] - c^2 z^2 (b^2 - a^2) = 0.$$

Posons

$$A = \frac{b^2(c^2 - a^2)}{c^2(b^2 - a^2)}, \quad B = \frac{b^2(b^2 - c^2)}{b^2 - a^2},$$

cette équation devient

$$\lambda^2 A y^2 + \lambda (y^2 - A z^2 - B) - z^2 = 0.$$

Remplaçons  $\lambda$  par  $\frac{1 - c^2 \rho}{b^2 \rho}$ , nous aurons l'équation en  $\rho$  :

$$A y^2 (c^2 \rho - 1)^2 + b^2 \rho (c^2 \rho - 1) (A z^2 + B - y^2) - b^4 \rho^2 z^2 = 0.$$

Le coefficient de  $\rho^2$  est

$$(A c^2 - b^2) (c^2 y^2 + b^2 z^2) + B b^2 c^2.$$

Mais l'équation de l'ellipsoïde donne

$$\frac{c^2 y^2 + b^2 z^2}{b^2 c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

et de plus

$$A c^2 - b^2 = \frac{b^2(c^2 - b^2)}{b^2 - a^2} = -B;$$

donc ce coefficient revient à  $\frac{B b^2 c^2 x^2}{a^2}$ .

Le coefficient de  $\rho$  sera

$$-2 A c^2 y^2 - b^2 (A z^2 + B - y^2).$$

Pour éliminer d'abord  $z^2$ , nous écrivons ce coefficient sous la forme

$$-A (2 c^2 y^2 + b^2 z^2) + b^2 y^2 - b^2 B,$$

ce qui, d'après ce qu'on vient de voir, revient à

$$-\frac{A b^2 c^2 (a^2 - x^2)}{a^2} - A c^2 y^2 + b^2 y^2 - b^2 B.$$

Comme

$$b^2 - A c^2 = B,$$

il reste

$$B (y^2 - b^4) - \frac{A b^2 c^2 (a^2 - x^2)}{a^2},$$

ou enfin

$$B y^2 + \frac{A b^2 c^2 x^2}{a^2} - b^4.$$

Enfin le terme indépendant sera  $A y^2$ . Si donc nous posons, pour abrégér,

$$\frac{b^2 c^2 x^2}{a^2} = t^2,$$

l'équation en  $\rho$  devient

$$B t^2 \rho^2 - \rho (B y^2 + A t^2 - b^4) + A y^2 = 0,$$

d'où

$$\rho_0 + \rho_1 = \frac{b^4 - B y^2 - A t^2}{B t^2}, \quad \rho_0 \rho_1 = \frac{A y^2}{B t^2}.$$

VIII. Avant de substituer ces valeurs dans l'expression de  $\delta$ , observons que celle qui donne  $\alpha$  peut se mettre sous la forme

$$\frac{\alpha x_1^3}{a^4} = \frac{1}{\left(\rho_0 + \frac{A}{B}\right)^2} \cdot \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}{c^4 (b^2 - c^2)^2},$$

ou bien

$$\frac{\alpha x_1^3 c^4}{a^4} = \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}{(b^2 - c^2)^2 \left(\rho_0 + \frac{A}{B}\right)^2}.$$

De même

$$\frac{\beta x_1^3 c^4}{a^4} = \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}{(b^2 - c^2)^2 \left( \rho_1 + \frac{A}{B} \right)^2},$$

et par conséquent

$$\frac{\delta x_1^3 c^4}{a^4} = \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}{(b^2 - c^2)^2 \left[ \rho_0 \rho_1 + \frac{A}{B}(\rho_0 + \rho_1) + \left( \frac{A}{B} \right)^2 \right]}.$$

Or, nous aurons

$$\begin{aligned} \rho_0 \rho_1 + \frac{A}{B}(\rho_0 + \rho_1) + \left( \frac{A}{B} \right)^2 &= \frac{A}{B} \left( \frac{y_1^2}{t^2} + \frac{b^4 - B y_1^2 - A t^2}{B t^2} + \frac{A}{B} \right) \\ &= \frac{A b^4}{B^2 t^2} = \frac{A a^2 b^2}{B^2 c^2 x_1^2}, \end{aligned}$$

car il s'agit ici du point donné sur l'ellipsoïde.

Ainsi

$$\frac{\delta x_1 c^2}{a^2} = \frac{B^2}{b^2 A} \cdot \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}{(b^2 - c^2)^2};$$

mais

$$\frac{B^2}{b^2 A} = \frac{c^2 (b^2 - c^2)^2}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)^2},$$

d'où enfin

$$\delta = \frac{a^2}{x_1}.$$

Les intersections des mêmes plans osculateurs avec les autres axes donneraient de même les quantités

$$\delta' = \frac{b^2}{y_1}, \quad \delta'' = \frac{c^2}{z_1}.$$

On voit que ces résultats sont très-simples, mais qu'ils dépendent de la position du point pris sur la surface. Ils sont donc en contradiction avec les énoncés de M. Heilermann et de M. Dewulf.