

GUSTAVE DUBOIS

Extension d'un théorème de Monge

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 398-400

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__398_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

EXTENSION D'UN THÉORÈME DE MONGE;

PAR M. GUSTAVE DUBOIS,
Professeur de Mathématiques.

THÉORÈME. — *Le lieu des sommets des angles trièdres circonscrits à un paraboloides du second ordre S, et dont les faces sont parallèles à trois plans diamétraux conjugués d'une surface à centre du second ordre S', est un plan parallèle au plan diamétral de S' conjugué des cordes parallèles à l'axe du paraboloides S.*

Soit

$$\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} + x = 0$$

l'équation du paraboloides S.

On n'ôtera rien à la généralité de la question en supposant que la surface S' a son centre à l'origine, et que par conséquent son équation est

$$(1) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B'yz + 2B''xz + 2B'''xy = 1.$$

Cela posé, soient

$$p = lx + l'y + l''z = 0,$$

$$q = mx + m'y + m''z = 0,$$

$$r = nx + n'y + n''z = 0,$$

les équations de trois plans diamétraux conjugués de la surface S'; on pourra mettre l'équation de cette surface sous la forme

$$Kp^2 + K'q^2 + K''r^2 = 1.$$

En identifiant avec l'équation (1), on trouve les équations

tions de condition :

$$(2) \quad \begin{cases} K l' + K' m^2 + K'' n^2 = A, \\ K l'^2 + K' m'^2 + K'' n'^2 = A', \\ K l''^2 + K' m''^2 + K'' n''^2 = A'', \\ K l' l'' + K' m' m'' + K'' n' n'' = B, \\ K l l'' + K' m m'' + K'' n n'' = B', \\ K l l' + K' m m' + K'' n n' = B''. \end{cases}$$

Maintenant, les équations des plans tangents à S et parallèles à $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, sont :

$$\begin{aligned} lx + l'y + l''z &= \frac{pl'^2 + ql''^2}{2l}, \\ mx + m'y + m''z &= \frac{pm'^2 + qm''^2}{2m}, \\ nx + n'y + n''z &= \frac{pn'^2 + qn''^2}{2n}, \end{aligned}$$

ce qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned} 2l^2x + 2ll'y + 2ll''z &= pl'^2 + ql''^2, \\ 2m^2x + 2mm'y + 2mm''z &= pm'^2 + qm''^2, \\ 2n^2x + 2nn'y + 2nn''z &= pn'^2 + qn''^2. \end{aligned}$$

Si l'on ajoute, après avoir multiplié respectivement par K, K', K'', on trouve, en tenant compte des conditions (2),

$$(3) \quad 2Ax + 2B''y + 2B'z = pA' + qA'' :$$

c'est l'équation d'un plan parallèle au plan diamétral de S conjugué des cordes parallèles à la droite

$$\begin{cases} \gamma = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

qui n'est autre que l'axe du parabolôide S.

Corollaire. — Le lieu des sommets des angles trièdres

(400)

trirectangles circonscrits à un parabolôide est un plan perpendiculaire à l'axe de ce parabolôide.

Car, si la surface S' devient une sphère, l'équation du plan (3) se réduit à

$$x = \frac{p + q}{2}.$$

Dans le cas du parabolôide de révolution, on trouve

$$x = p;$$

dans le cas du parabolôide hyperbolique équilatère, on trouve

$$x = 0.$$

Scolie. — Pour que le plan (3) soit perpendiculaire à l'axe du parabolôide, il suffit que la surface S' ait l'un de ses axes parallèle à l'axe du parabolôide.
