

V.-A. LE BESGUE

Note sur la transformation des coordonnées

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 392-397

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__392_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LA TRANSFORMATION DES COORDONNÉES;

PAR M. V.-A. LE BESGUE,

Correspondant de l'Institut.

I.

La transformation des coordonnées rectilignes, soit dans un plan, soit dans l'espace, devrait se faire par des formules semblables.

Si une droite OM , rapportée à trois plans coordonnés Oxy , Oxz , Oyz , faisant un angle trièdre de sommet O , et ayant pour arêtes Ox , Oy , Oz sur lesquelles se comptent les coordonnées positives, a pour équations

$$(1) \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

a , b , c étant les coordonnées d'un point M pris à une distance $OM = 1$ de l'origine, on aura l'équation de condition

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{OM}^2 = 1 = a^2 + b^2 + c^2 \\ + 2bc \cos(y, z) + 2ca \cos(z, x) + 2ab \cos(x, y). \end{array} \right.$$

Il faut remarquer que a étant, sur l'axe des x , la longueur de la projection de la droite $OM = 1$, obtenue en menant par le point M un plan parallèle au plan yOz , la projection d'une longueur r , prise sur cette droite à partir du point O et dans le sens de OM , sera égale à ar .

D'après cela, si l'on prend trois nouveaux axes de coordonnées, passant par la même origine O , et ayant pour

équations

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}, & \text{axe des } x', \\ \frac{x}{a'} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'}, & \text{axe des } y', \\ \frac{x}{a''} = \frac{y}{b''} = \frac{z}{c''}, & \text{axe des } z', \end{cases}$$

les nouvelles coordonnées étant x', y', z' , on aura

$$(4) \quad \begin{cases} x = ax' + a'y' + a''z', \\ y = bx' + b'y' + b''z', \\ z = cx' + c'y' + c''z', \end{cases}$$

et les trois relations

$$(5) \quad \begin{cases} 1 = a^2 + b^2 + c^2 \\ + 2bc \cos(y, z) + 2ca \cos(z, x) + 2ab \cos(x, y), \\ 1 = a'^2 + b'^2 + c'^2 \\ + 2b'c' \cos(y, z) + 2c'a' \cos(z, x) + 2a'b' \cos(x, y), \\ 1 = a''^2 + b''^2 + c''^2 \\ + 2b''c'' \cos(y, z) + 2c''a'' \cos(z, x) + 2a''b'' \cos(x, y). \end{cases}$$

Si l'on pose

$$(6) \quad \Delta = a(b'c'' - c'b'') + b(c'a'' - a'c'') + c(a'b'' - b'a''),$$

les équations (4) donneront

$$(7) \quad \begin{cases} \Delta x' = (b'c'' - c'b'')x + (c'a'' - a'c'')y + (a'b'' - b'a'')z \\ \quad = a_1x + a'_1y + a''_1z, \\ \Delta y' = (b''c - c''b)x + (c'a - a''c')y + (a'b - b'a'')z \\ \quad = b_1x + b'_1y + b''_1z, \\ \Delta z' = (bc' - cb')x + (ca' - ac')y + (ab' - ba'')z \\ \quad = c_1x + c'_1y + c''_1z. \end{cases}$$

Le plan qui passe par les droites Oy', Oz' étant repré-

seulé par

$$Lx + My + Nz = 0,$$

on aura

$$La' + Mb' + Nc' = 0, \quad La'' + Mb'' + Nc'' = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{L}{b'c'' - c'b''} = \frac{M}{c'a'' - a'c''} = \frac{N}{a'b'' - b'a''}$$

ou

$$\frac{L}{a_1} = \frac{M}{a'_1} = \frac{N}{a''_1}.$$

On aura donc les équations suivantes :

$$(8) \quad \begin{cases} a_1x + a'_1y + a''_1z = 0, & \text{pour le plan } y'Oz', \\ b_1x + b'_1y + b''_1z = 0, & \text{pour le plan } z'Ox', \\ c_1x + c'_1y + c''_1z = 0, & \text{pour le plan } x'Oy'. \end{cases}$$

Si l'on admettait que les trois droites Ox' , Oy' , Oz' fussent dans un même plan, on aurait de plus

$$La + Mb + Nc = 0,$$

et par suite

$$a(b'c'' - c'b'') + b(c'a'' - a'c'') + c(a'b'' - b'a'') = \Delta = 0.$$

Cette équation ne peut avoir lieu quand les trois droites Ox' , Oy' , Oz' ne sont pas dans un même plan, comme il arrive dans la transformation des coordonnées.

II.

Pour l'application suivante, il faut trouver l'équation d'un plan tangent à la surface à centre

$$(a) \quad \alpha x^2 + \alpha' y^2 + \alpha'' z^2 = 1$$

et parallèle au plan

$$(b) \quad a_1x + a'_1y + a''_1z = 0.$$

Il faut donc, en représentant par x', y', z' les coordonnées du point de contact, identifier les équations

$$\alpha x x' + \alpha' y y' + \alpha'' z z' = 1, \quad a_1 x + a'_1 y + a''_1 z = \delta,$$

en supposant

$$\alpha x'^2 + \alpha' y'^2 + \alpha'' z'^2 = 1.$$

On a donc

$$\alpha x' = \frac{a_1}{\delta}, \quad \alpha' y' = \frac{a'_1}{\delta}, \quad \alpha'' z' = \frac{a''_1}{\delta},$$

ou encore

$$x' \sqrt{\alpha} = \frac{a_1}{\delta \sqrt{\alpha}}, \quad y' \sqrt{\alpha'} = \frac{a'_1}{\delta \sqrt{\alpha'}}, \quad z' \sqrt{\alpha''} = \frac{a''_1}{\delta \sqrt{\alpha''}},$$

et comme l'on a

$$(x' \sqrt{\alpha})^2 + (y' \sqrt{\alpha'})^2 + (z' \sqrt{\alpha''})^2 = 1,$$

on en déduira

$$\delta^2 = \frac{a_1^2}{\alpha} + \frac{a'_1{}^2}{\alpha'} + \frac{a''_1{}^2}{\alpha''}.$$

Le plan tangent est donc

$$(c) \quad a_1 x + a'_1 y + a''_1 z = \sqrt{\frac{a_1^2}{\alpha} + \frac{a'_1{}^2}{\alpha'} + \frac{a''_1{}^2}{\alpha''}}.$$

Comme le radical peut prendre le signe + ou le signe —, il y a deux plans tangents parallèles au plan (b).

En élevant au carré, on a l'équation

$$(d) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1^2 x^2 + a_1'^2 y^2 + a_1''^2 z^2 + 2 a_1 a_1'' y z + 2 a_1 a_1' z x + 2 a_1 a_1' x y \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{a_1^2}{\alpha} + \frac{a_1'^2}{\alpha'} + \frac{a_1''^2}{\alpha''} \end{array} \right.$$

pour le système de ces deux plans.

III.

Soit une surface du second degré, ayant son centre à

l'origine et représentée par l'équation

$$(e) \quad \overline{A}x^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B'yz + 2B'zx + 2B''xy = D.$$

Si l'on fait disparaître les rectangles en transformant les coordonnées par les formules (4) et que l'on trouve ainsi

$$(f) \quad A_1x'^2 + A_1'y'^2 + A_1''z'^2 = D,$$

on repassera à l'équation (e) au moyen des formules (7), et comme on obtient ainsi l'équation

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{\Delta^2} (a_1x + a_1'y + a_1''z)^2 + \frac{A_1'}{\Delta^2} (b_1x + b_1'y + b_1''z)^2 \\ + \frac{A_1''}{\Delta^2} (c_1x + c_1'y + c_1''z)^2 = D, \end{aligned}$$

on trouvera, en identifiant cette équation et l'équation (e),

$$(g) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{1}{\Delta^2} (A_1a_1^2 + A_1'b_1^2 + A_1''c_1^2), \\ A' &= \frac{1}{\Delta^2} (A_1a_1'^2 + A_1'b_1'^2 + A_1''c_1'^2), \\ A'' &= \frac{1}{\Delta^2} (A_1a_1''^2 + A_1'b_1''^2 + A_1''c_1''^2), \\ B &= \frac{1}{\Delta^2} (A_1a_1'a_1'' + A_1'b_1'b_1'' + A_1''c_1'c_1''), \\ B' &= \frac{1}{\Delta^2} (A_1a_1'a_1' + A_1'b_1'b_1' + A_1''c_1'c_1'), \\ B'' &= \frac{1}{\Delta^2} (A_1a_1'a_1'' + A_1'b_1'b_1'' + A_1''c_1'c_1''). \end{aligned} \right.$$

Si l'on prend une seconde surface à centre ayant pour équation

$$(h) \quad \alpha x^2 + \alpha'y^2 + \alpha''z^2 = 1,$$

et que l'on mène des plans tangents parallèles aux plans conjugués de la surface (e), plans dont les équations for-

ment le système (8), on aura, d'après l'équation (d), les trois équations suivantes :

$$(i) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1^2 x^2 + a_1'^2 y^2 + a_1''^2 z^2 + 2a_1' a_1'' yz + 2a_1'' a_1' zx + 2a_1' a_1' xy \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{a_1^2}{\alpha} + \frac{a_1'^2}{\alpha'} + \frac{a_1''^2}{\alpha''}, \\ b_1^2 x^2 + b_1'^2 y^2 + b_1''^2 z^2 + 2b_1' b_1'' yz + 2b_1'' b_1' zx + 2b_1' b_1' xy \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{b_1^2}{\alpha} + \frac{b_1'^2}{\alpha'} + \frac{b_1''^2}{\alpha''}, \\ c_1^2 x^2 + c_1'^2 y^2 + c_1''^2 z^2 + 2c_1' c_1'' yz + 2c_1'' c_1' zx + 2c_1' c_1' xy \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{c_1^2}{\alpha} + \frac{c_1'^2}{\alpha'} + \frac{c_1''^2}{\alpha''}. \end{array} \right.$$

Multipliant la première par $\frac{A_1}{\Delta^2}$, la seconde par $\frac{A_1'}{\Delta^2}$ et la troisième par $\frac{A_1''}{\Delta^2}$, on trouvera en ajoutant, membre à membre,

$$(k) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = \frac{A}{\alpha} + \frac{A'}{\alpha'} + \frac{A''}{\alpha''}.$$

Cette équation représente *le lieu des sommets des angles trièdres circonscrits à la surface (h) et dont les faces sont parallèles aux plans conjugués de la surface (e)*. Ce lieu est donc une surface homothétique de même centre que la surface (e). Autrement dit, elle lui est concentrique, semblable et semblablement placée (*).

(*) La recherche de ce lieu a été proposée, il y a trois ou quatre ans, au Concours général des lycées de Paris.