L. AUTOS

# Question 647

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 2 (1863), p. 387-391

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__387_1>

## QUESTION 647

(voir p. 144);

SOLUTION DE M. L. AUTOS, D'ATHÈNES.

### I.

L'équation de l'ellipse rapportée à ses axes est

$$a^2Y^2 + b^2X^2 = a^2b^2.$$

Si l'on appelle $\varepsilon$ l'angle de la tangente avec l'axe des $x$, on a

$$\operatorname{tang}\varepsilon = -\frac{b^2X}{a^2Y};$$

le valeurs de X et de Y, tirées de ces deux équations, sont :

$$X = \frac{a^2\sin\varepsilon}{\sqrt{a^2\sin^2\varepsilon + b^2\cos^2\varepsilon}}, \quad Y = \frac{-b^2\cos\varepsilon}{\sqrt{a^2\sin^2\varepsilon + b\cos^2\varepsilon}}.$$

Soient $l$ une longueur portée sur la tangente à partir du point de contact, et $x$, $y$ les coordonnées de l'extrémité de $l$; si l'on pose, pour abréger,

$$(\delta) \qquad D^2 = a^2\sin^2\varepsilon + b^2\cos^2\varepsilon,$$

le principe des projections donne

$$x = l\cos\varepsilon + \frac{a^2}{D}\sin\varepsilon, \quad y = l\sin\varepsilon - \frac{b^2}{D}\cos\varepsilon.$$

L'élimination de $\varepsilon$ entre ces deux équations donnera une relation entre $x$ et $y$, qui sera l'équation du lieu. Cette élimination exige quelques précautions.

Divisons la première des équations précédentes par $a$ et la seconde par $b$, élevons au carré et ajoutons; nous aurons

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = l^2D^2.$$

Cette équation donne l'auxiliaire D en fonction de $x, y$; si à l'équation ($\delta$) on joint la relation

$$\sin^2\varepsilon + \cos^2\varepsilon = 1,$$

la résolution de ces deux équations, par rapport à $\cos\varepsilon$, $\sin\varepsilon$, donnera les égalités

$$\cos^2\varepsilon = \frac{a^2 - D^2}{c^2}, \quad \sin^2\varepsilon = \frac{D^2 - b^2}{c^2},$$

dans lesquelles, pour abréger, l'on a posé $a^2 - b^2 = c^2$. Si, maintenant, on multiplie la valeur de $x$ par $\sin\varepsilon$, la valeur de $y$ par $\cos\varepsilon$, et qu'on les retranche l'une de l'autre, il viendra

$$x\sin\varepsilon - y\cos\varepsilon = D;$$

en remplaçant, dans cette équation, $\sin\varepsilon$, $\cos\varepsilon$ et D par leurs valeurs trouvées ci-dessus, on obtient finalement

$$(\gamma)\left\{\begin{aligned} &\pm x\sqrt{a^2y^2+b^2x^2-b^2(a^2+l^2)}\pm y\sqrt{a^2(b^2+l^2)-a^2y^2-b^2x^2} \\ &\qquad = \pm c\sqrt{a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2}, \end{aligned}\right.$$

qui est l'équation du lieu. Si l'on chasse les radicaux, on aura l'équation

$$\left[(x^2+y^2+c^2-l^2)(a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)-a^2b^2l^2\right]^2$$
$$=4c^2x^2(a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)\left[(a^2y^2+b^2x^2-b^2(a^2+l^2)\right],$$

qui est du huitième degré.

II.

Conservons la forme radicale $(\gamma)$ de l'équation du lieu, parce qu'elle se prête mieux à une discussion facile.

Si l'on égale à zéro chacune des expressions placées sous les premiers radicaux, on a

$$a^2y^2+b^2x^2-b^2(a^2+l^2)=0,$$
$$a^2y^2+b^2x^2-a^2(b^2+l^2)=0.$$

Ce sont les équations de deux ellipses concentriques à l'ellipse proposée, semblables et semblablement placées, la première étant intérieure à la seconde.

La simple inspection de l'équation radicale $(\gamma)$ de la courbe montre que cette courbe est toute comprise entre les deux ellipses auxiliaires dont nous venons de parler, car pour tout point situé intérieurement à la première le premier radical est imaginaire, et pour tout point extérieur à la seconde le second radical devient imaginaire. On voit aussi que la courbe est tangente à la première ellipse en quatre points symétriques deux à deux, par rapport aux axes, les équations de ces quatre points étant

$$y_1=\pm b,\quad x_1=\pm l;$$

et qu'elle est aussi tangente à la seconde ellipse en quatre points symétriques deux à deux par rapport aux axes, les équations de ces points étant

$$y_2=\pm l,\quad x_2=\pm a.$$

La courbe est formée de deux anneaux distincts : le premier anneau est le lieu des extrémités de $l$ comptée d'un côté de la tangente à partir du point de contact, et le second anneau, le lieu des extrémités de $l$ comptée de l'autre côté de la tangente à partir du point de contact. Ces deux anneaux s'entre-croisent en quatre points situés sur les axes, et symétriques deux à deux par rapport au centre.

Si l'on suppose que la tangente à l'ellipse donnée glisse sur cette courbe de gauche à droite à partir de l'extrémité positive du petit axe, et qu'elle porte la longueur $l$ comptée de gauche à droite à partir du point de contact, l'extrémité de $l$ dans sa position initiale marquera le point où la courbe touche l'ellipse auxiliaire intérieure. Dans le mouvement de la tangente, l'extrémité de $l$ s'éloigne de plus en plus de la circonférence de l'ellipse intérieure, rencontre l'axe des $x$ en un point situé entre les deux ellipses auxiliaires, et ensuite rencontre l'ellipse extérieure au point de contact de la courbe avec cette ellipse. A partir de cet instant, elle s'éloigne de l'ellipse extérieure, rencontre l'axe des $y$ en un point situé entre les deux ellipses auxiliaires, et se rapprochant de plus en plus de l'ellipse intérieure la rencontre au point de contact de cette ellipse avec la courbe. Ce point de contact est le symétrique du point initial par rapport au centre, et à partir de ce point les mêmes accidents se reproduisent, et dans le même ordre que dans la première moitié de l'anneau.

Si, dans le mouvement de la tangente, on avait porté la longueur $l$ sur cette tangente à partir du point de contact, mais du côté opposé, l'extrémité de $l$ aurait engendré l'autre anneau. Il est aisé de voir que ces deux anneaux sont égaux, et qu'on les amènerait à coïncidence en faisant tourner le premier autour du centre de l'ellipse, de façon que l'un des rayons de l'anneau prît une position symétrique par rapport à l'axe des $x$, ou par rapport à l'axe des $y$.

### III.

Si l'on suppose $l$ égale à zéro, l'équation du lieu devient :

$$[\pm(x-c)\pm y\sqrt{-1}]\sqrt{a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2}=0.$$

Le premier facteur est imaginaire ; le second, égalé à zéro, donne l'équation de l'ellipse proposée, comme cela se voit à priori.

Si, dans l'équation $(\gamma)$, on suppose $b=a$, d'où $c=0$, cette équation devient

$$(\pm x\pm y\sqrt{-1})\sqrt{x^2+y^2-a^2-l^2}=0.$$

On voit donc que, lorsque l'ellipse proposée dégénère en cercle, le lieu $(\gamma)$ se réduit à un cercle concentrique dont le rayon est $\sqrt{a^2+l^2}$, ainsi qu'on peut le reconnaître directement.

Terminons par l'énoncé des deux théorèmes suivants, qui se démontrent sans difficulté.

1° Lorsque la tangente à l'ellipse proposée a parcouru toute la circonférence de cette ellipse, la longueur $l$ a balayé une aire égale à l'aire du cercle de rayon $l$.

2° La normale à la courbe en un point s'obtient en construisant l'hypoténuse du triangle rectangle dont les deux côtés sont : le premier, la longueur $l$ comptée sur la tangente à l'ellipse donnée au point correspondant, à partir du point de contact ; et le second, le rayon de courbure en ce point de la même ellipse (*).

(*) M. Autos est prié de demontrer ces deux propositions. G.