Nouvelles annales de mathématiques

Note sur une propriété des courbes planes, d'après M. Timmermans

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 347-350

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__347_1>

NOTE SUR UNE PROPRIÉTÉ DES COURBES PLANES, D'APRÈS M. TIMMERMANS;

PAR UN ABONNÉ.

M. Timmermans a donné dans les *Mémoires de la Société des sciences de Lille* (1827-1828) une propriété curieuse des courbes planes. Comme ce recueil n'a qu'une publicité restreinte, il est probable que peu de personnes connaissent le théorème de M. Timmermans, et il sera sans doute agréable aux lecteurs des *Nouvelles Annales* de le trouver ici.

THÉORÈME. — *En un point quelconque* M *d'une courbe plane soient construits le rayon de courbure* R_1 *de cette courbe et les rayons de courbure* R_2, R_3,..., *des développées successives à l'infini. Il existe sur le plan de la courbe un point unique* O *tel que, si de ce point on abaisse:* 1° *une perpendiculaire* OT *sur la tangente;*

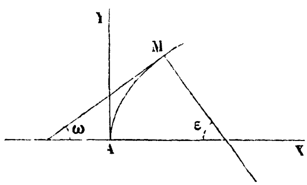
2° *une perpendiculaire* ON *sur la normale, on aura*

$$\mathrm{OT} = \mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_3 + \mathrm{R}_5 - \ldots,$$

$$\mathrm{ON} = \mathrm{R}_2 - \mathrm{R}_4 + \mathrm{R}_6 - \ldots,$$

c'est-à-dire que la perpendiculaire abaissée de O *sur la tangente en un point quelconque est égale à la somme des rayons de courbure successifs d'ordre impair relatifs à ce point, ces rayons pris avec des signes alternativement positifs et négatifs; et la perpendiculaire abaissée sur la normale est égale à la somme des rayons de courbure d'ordre pair, pris aussi avec des signes alternatifs.*

Démonstration. — Supposons la courbe rapportée à sa normale et à sa tangente en un premier point fixe A; et



soit M un point variable dont les coordonnées sont x et y. En appelant ω l'angle que la tangente en M fait avec l'axe des x, et s l'arc de courbe, on a

$$dx = \cos\omega . ds, \quad dy = \sin\omega . ds.$$

D'ailleurs, à tout élément de courbe on peut substituer l'élément du cercle de courbure; ainsi, en appelant ε l'angle de la normale avec le même axe $\left(\text{de sorte que } \omega + \varepsilon = \frac{\pi}{2}\right)$, on a $ds = \mathrm{R}_1 d\varepsilon$; et les relations ci-dessus deviennent

$$dx = -\mathrm{R}_1 \cos\omega\, d\omega, \quad dy = -\mathrm{R}_1 \sin\omega\, d\omega.$$

De plus, la théorie des développées donnant que l'accroissement différentiel du rayon de courbure est égal à l'arc élémentaire de la développée, si on représente par s_1 l'arc de la première développée, on a

$$dR_1 = ds_1,$$

et comme $ds_1 = R_2 d\varepsilon$ ou $= -R_2 d\omega$, on a finalement

$$dR_1 = -R_2 d\omega,$$

et de même

$$dR_2 = -R_3 d\omega,$$
$$dR_3 = -R_4 d\omega,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Cela posé, calculons la valeur de x en intégrant par parties celle de dx; il vient d'abord pour l'intégrale indéfinie

$$\begin{aligned} x = \text{const} - R_1 \sin\omega &- \int R_2 \sin\omega\, d\omega \\ &+ R_2 \cos\omega + \int R_3 \cos\omega\, d\omega \\ &\qquad + R_3 \sin\omega + \int R_4 \sin\omega\, d\omega \\ &\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

formule qu'il faut lire en remplaçant successivement l'intégrale de chaque ligne par les deux termes placés au-dessous d'elle dans la ligne suivante. Supposons l'intégration par parties prolongée indéfiniment et prenons à la limite inférieure de l'intégrale $\omega = \frac{\pi}{2}$, ce qui répond au point A de la figure. Si nous représentons par r_1, r_2, $r_3, \ldots$, les rayons successifs relatifs à ce point, il viendra

$$\begin{aligned} x = (R_2 - R_4 + R_6 - \ldots)\cos\omega - (R_1 - R_3 + R_5 - \ldots)\sin\omega \\ + (r_1 - r_3 - r_5 - \ldots), \end{aligned}$$

ou bien, en représentant par ΣR_p la somme des rayons d'ordre pair pris alternativement avec les signes $+$ et -1, et par ΣR_i la somme des rayons impairs pris aussi alternativement avec les signes $+$ et $-$,

$$x = (\Sigma R_p)\cos\omega - (\Sigma R_i)\sin\omega + (\Sigma r_i).$$

On trouvera de la même manière

$$y = (\Sigma R_p)\sin\omega + (\Sigma R_i)\cos\omega - \Sigma r_p.$$

Supposons maintenant que les deux sommes relatives au point A aient des valeurs finies; transportons l'origine au point dont les coordonnées sont

$$x_1 = (\Sigma r_i),\quad y_1 = -(\Sigma r_p);$$

puis, par cette nouvelle origine, menons deux nouveaux axes rectangulaires OX′ et OY′ respectivement parallèles à la normale et à la tangente en M, c'est-à-dire dont la situation soit représentée par une rotation des anciens axes égale à $\frac{\pi}{2} - \omega$, effectuée dans le sens de $+x$ à $-y$ (pour que le nouvel axe des x soit la normale en M); les formules connues donneront les relations suivantes :

$$x = Y\cos\omega + X\sin\omega + \Sigma r_i,$$
$$y = Y\sin\omega - X\cos\omega - \Sigma r_p.$$

Or, si on applique ces formules aux coordonnées du point M trouvées ci-dessus par l'intégration, on trouvera pour ce point

$$X = -(\Sigma R_i),\quad Y = (\Sigma R_p),$$

ce qui constitue précisément le résultat énoncé au théorème.

Nota.—Il arrivera dans certaines courbes que ce point dont nous venons d'établir l'existence, et que M. Timmermans appelle *pôle de la courbe*, sera situé à l'infini.