

ÉMILE DUPUY

Théorème

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 346-347

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_346_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME

DÉMONTRÉ PAR M. ÉMILE DUPUY,
Élève de M. V. H., à la pension de Laflolie.

Étant donné un cercle dont le centre est O et le rayon R, on prend sur un diamètre COD la distance OQ égale au côté du carré inscrit, et, par le point Q, on conduit une sécante quelconque QAB, rencontrant la circonférence aux points A, B. Puis, aux points A, B, on élève à la sécante des perpendiculaires, et on projette le centre O sur ces perpendiculaires, en M et N : le lieu géométrique de ces projections est une ligne telle, que le produit des distances de chacun de ses points à deux points fixes est constant.

Soit

$$OQ' = OQ = R\sqrt{2},$$

et soient F et F' les milieux de OQ et de OQ'; je dis que les points fixes F, F' sont tels, que le produit $MF \times MF'$ est constant.

En effet, les triangles QOM, Q'OM donnent, d'après un théorème connu,

$$OM^2 + MQ^2 = 2MF^2 + 2OF^2,$$

$$OM^2 + MQ'^2 = 2MF'^2 + 2OF'^2.$$

D'où

$$(1) \quad 2MF^2 = OM^2 + MQ^2 - 2OF^2,$$

$$(2) \quad 2MF'^2 = OM^2 + MQ'^2 - 2OF'^2.$$

Mais

$$2OF^2 = 2OF'^2 = R^2.$$

D'ailleurs,

$$MQ^2 = AM^2 + AQ^2 = R^2 - OM^2 + AQ^2;$$

substituant dans l'égalité (1), il vient

$$2MF^2 = AQ^2.$$

On a de même

$$2MF'^2 = BQ^2.$$

Par suite

$$2MF \times MF' = QA \times QB = R^2,$$

d'où

$$MF \times MF' = \frac{R^2}{2}, \text{ quantité constante.}$$