Nouvelles annales de mathématiques

S. Realis

Démonstration d'un théorème de M. Tchébychew

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 320-325

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__320_1>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. TCHÉBYCHEW;

PAR M. S. REALIS,
Ingénieur à Turin.

1. Le théorème de M. Tchébychew, qui figure dans les *Nouvelles Annales* parmi les propositions à démontrer (*voir* t. XV, question 347, et t. XVI, question 356; *voir* aussi le *Bulletin mathématique* pour 1860, p. 52), consiste en ce que, *dans une équation algébrique* (à coefficients réels) *de la forme*

$$x^{2n+1} + ax^{2n-1} + bx^{2n-3} + \ldots + hx + k = 0,$$

qui ne renferme que des puissances impaires de l'inconnue et le terme tout connu, il y a toujours au moins une racine réelle comprise entre $+2\sqrt[2n+1]{\frac{k}{2}}$ et $-2\sqrt[2n+1]{\frac{k}{2}}$.

Une démonstration de ce théorème, fondée sur la considération des propriétés d'une courbe transcendante, a été insérée par M. de Foville (*) dans ce même recueil (t. XVII), mais elle ne tient pas directement aux théories ordinaires de l'Algèbre.

Voici comment on peut établir la vérité de cette proposition, en ne s'appuyant que sur les principes généraux de l'analyse des équations.

(*) Aujourd'hui elève-ingenieur des Mines. P.

2. J'observerai d'abord que la démonstration ne perd pas de sa généralité en supposant dans l'équation donnée $k=2$, car, en remplaçant l'inconnue x par $x\sqrt[2n+1]{\frac{k}{2}}$, on obtient une équation de même forme que la proposée et ayant le dernier terme égal à 2; en sorte que l'énoncé ci-dessus revient à dire que, *dans l'équation*

$$(1)\qquad x^{2n+1}+ax^{2n-1}+bx^{2n-3}+\ldots+hx+2=0,$$

il y a au moins une racine réelle comprise entre $+2$ *et* -2.

Cela posé, considérons l'équation réciproque

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{Y}=y^{4n+2}+\mathrm{A}y^{4n}+\mathrm{B}y^{4n-2}+\ldots+2y^{2n+1}+\ldots \\ \qquad\qquad +\mathrm{B}y^4+\mathrm{A}y^2+1=0, \end{array}\right.$$

ne contenant que des puissances paires de l'inconnue, à l'exception du terme du milieu $2y^{2n+1}$. Nous pourrons toujours, à l'aide d'équations de premier degré, déterminer les coefficients A, B,..., de cette équation de manière que l'équation de degré $2n+1$ en x, que l'on obtient en faisant $y+\frac{1}{y}=x$, conformément à la méthode d'abaissement des équations réciproques, coïncide avec la proposée.

On voit dès à présent que le théorème en question se trouvera démontré, si l'on prouve que l'équation (2) admet toujours au moins un couple de racines imaginaires dont le module soit égal à l'unité, c'est-à-dire qu'elle admet au moins un facteur réel du second degré de la forme y^2+xy+1, x étant moindre que 2 (en valeur absolue).

3. Prouvons d'abord que l'équation réciproque (2) admet des racines imaginaires. Il suffit, pour cela, de remarquer que, si toutes les racines sont réelles, en désignant par $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{2n+1}$ celles que l'on regarde comme indépendantes l'une de l'autre, et conséquemment par $\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \frac{1}{y_3}, \ldots, \frac{1}{y_{2n+1}}$ leurs réciproques respectives, on doit pouvoir décomposer le premier membre Y en deux facteurs réels de degré $2n+1$, dont l'un, que nous indiquerons par

$$Y_1 = y^{2n+1} + a_1 y^{2n} + a_2 y^{2n-1} + \ldots + a_{2n-1} y^2 + a_{2n} y + a_{2n+1},$$

soit le produit des facteurs $y - y_1, y - y_2, y - y_3, \ldots, y - y_{2n+1}$, et l'autre

$$Y_2 = y^{2n+1} + \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} y^{2n} + \frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}} y^{2n-1} + \ldots$$
$$+ \frac{a_2}{a_{2n+1}} y^2 + \frac{a_1}{a_{2n+1}} y + \frac{1}{a_{2n+1}}$$

soit le produit des facteurs $y - \frac{1}{y_1}, y - \frac{1}{y_2}, y - \frac{1}{y_3} \ldots,$ $y - \frac{1}{y_{2n+1}}$. Or, comme dans le produit $Y_1 Y_2$ le coefficient du terme du milieu y^{2n+1} est

$$a_{2n+1} + \frac{1}{a_{2n+1}} + \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{2n-1}^2 + a_{2n}^2}{a_{2n+1}},$$

et a toujours une valeur numérique plus grande que 2, il est impossible que le polynôme Y, où le coefficient de y^{2n+1} est 2, soit le produit des polynômes Y_1 et Y_2 dont tous les coefficients sont réels.

Maintenant il est facile de voir que, dès que l'équation (2) ne saurait avoir toutes ses racines réelles, il faut nécessairement que, parmi ses racines imaginaires, il y en ait au moins deux conjuguées qui soient réciproques l'une de l'autre, c'est-à-dire qui constituent un couple ayant l'unité pour module.

Considérons en premier lieu le cas où toutes les racines sont imaginaires. A chaque couple $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, il correspondra le couple réciproque $\frac{1}{\alpha \pm \beta\sqrt{-1}}$, en sorte que, si aucun module n'est égal à l'unité, le nombre des racines devrait être un multiple de 4. Cela est impossible, le degré de l'équation étant $4n+2$; d'où l'on conclut nécessairement que, puisqu'il n'y a pas de racines réelles, un de ces couples sera tel, que l'on ait

$$\alpha \pm \beta\sqrt{-1} = \frac{1}{\alpha \mp \beta\sqrt{-1}}.$$

Si l'équation $Y=0$ admet des racines réelles, le nombre de celles-ci sera pair, et nous supposerons d'abord que ce nombre est un multiple de 4. Dans ce cas, le nombre des racines imaginaires ne sera pas un multiple de 4, et il y aura nécessairement, comme dans le cas de toutes les racines imaginaires, un couple de racines conjuguées ayant pour module l'unité.

Si l'on supposait que le nombre des racines réelles pût être $4r+2$, celui des racines imaginaires serait $4(n-r)$, et l'on devrait pouvoir décomposer Y, comme ci-dessus, en deux facteurs réels Y_1, Y_2 dont l'un contiendrait $2(n-r)$ racines imaginaires conjuguées et $2r+1$ racines réelles, et l'autre contiendrait les racines réciproques correspondantes. Mais on a vu que cette décomposition est impossible, à cause du coefficient du terme y^{2n+1} qui résulterait toujours plus grand numériquement que le coefficient 2 qui y correspond dans le polynôme Y.

Il est donc prouvé que, dans tous les cas, l'équation réciproque $Y=0$ admettra au moins un couple de racines imaginaires conjuguées ayant le module égal à l'unité; d'où il suit que l'équation (1), dont chaque racine x est égale à la somme $y+\frac{1}{y}$ de deux racines réciproques, admettra au moins une racine réelle dont la valeur numérique sera moindre que 2. C'est le théorème qu'il s'agissait de démontrer.

4. Soit

$$y = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$$

la racine imaginaire de l'équation $Y = 0$ dont le module est égal à 1 : on aura

$$y + \frac{1}{y} = 2\cos\varphi,$$

$$y^3 + \frac{1}{y^3} = 2\cos 3\varphi,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$y^{2n+1} + \frac{1}{y^{2n+1}} = 2\cos(2n+1)\varphi.$$

Substituant ces expressions dans l'équation divisée par y^{2n+1}, on trouvera, après avoir divisé par 2,

$$(3)\quad \begin{cases} \cos(2n+1)\varphi + A\cos(2n-1)\varphi + B\cos(2n-3)\varphi + \ldots \\ \qquad + G\cos\varphi + 1 = 0. \end{cases}$$

On voit par là que le théorème de M. Tchébychew peut être énoncé sous cette forme remarquable, savoir : que *toute équation de la forme* (3), *où il n'entre que des multiples impairs de l'angle* φ *et où les coefficients* A, B,.., G *sont des quantités réelles quelconques, peut être satisfaite par une valeur réelle de* φ, *prise dans l'étendue de la demi-circonférence.*

5. De ce que toute équation réciproque de degré $4n+2$, dans laquelle (le coefficient du premier terme étant l'unité) la valeur absolue du coefficient du terme du milieu est 2 ou moindre que 2, admet au moins un couple de racines imaginaires conjuguées ayant l'unité pour module, il s'ensuit que l'équation du degré $2n+1$, à laquelle on par-

vient par la méthode ordinaire d'abaissement, aura au moins une racine réelle dont la valeur sera comprise entre + 2 et — 2. En partant de ce principe, on peut établir d'autres théorèmes analogues à celui que nous venons de démontrer, ayant pour but de fixer des limites entre lesquelles une ou plusieurs racines d'une équation donnée soient toujours comprises. On voit tout de suite, par exemple, que l'équation

$$x^{2n+1} + ax^{2n-1} + bx^{2n-3} + \ldots + hx + k + px^2 = 0,$$

dont px^2 est le seul terme de degré pair, admet toujours une racine comprise entre $+2$ et -2, si le coefficient p et le terme connu k sont tels, que la quantité $k + 2p$ soit comprise entre les limites $+2$ et -2, ou soit égale à l'une de ces limites. Mais je n'insisterai pas à présent sur ces considérations, qui, combinées avec d'autres principes connus, peuvent conduire à des résultats assez remarquables et amener des secours nouveaux à la pratique de la séparation des racines.