Nouvelles annales de mathématiques

Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 25-31

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__25_1>

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie des Séries, contenant : 1° les règles de convergence et les propriétés fondamentales des séries; 2° l'étude et la sommation de quelques séries; 3° quelques applications de la théorie des séries au calcul des expressions transcendantes; par *M. H. Laurent*, officier du génie, ancien élève de l'École Polytechnique. Ouvrage destiné aux candidats des Écoles Polytechnique et Normale, et aux personnes qui désirent suivre les cours des Facultés des Sciences. In-8° de VIII-124 pages. Paris, Mallet-Bachelier. — Prix : 4 francs.

Voici un petit livre où les séries sont traitées avec beaucoup de soin, on peut même dire avec amour, car M. Hermann Laurent aime véritablement les séries. Ce n'est point un mal, s'il est vrai qu'on ne puisse réussir dans un sujet quelconque sans y mettre un peu de passion.

Après quelques définitions, l'auteur expose les principales propriétés des séries. L'énoncé qui accompagne la remarque II du I^er^ théorème aurait dû être présenté comme la définition même des séries convergentes, présentée sous une forme un peu différente. La réciproque en est donc vraie, comme doit l'être la réciproque de toute bonne définition. Aussi quand on dit, avec certains auteurs : « Pour qu'une série soit convergente, il *suffit* que la somme des p termes qui suivent le n^{ieme} diminue indéfiniment *quel que soit* p », on n'apprend rien de plus au lecteur que si on lui disait qu'une série est convergente... quand elle est convergente. Quelquefois on n'énonce pas la proposition correctement ou l'on explique mal ce qu'il faut entendre par les mots « quel que soit p » ; alors on a une proposition fausse, comme l'a démontré M. Catalan dans son excellent *Traité des Séries*.

M. Laurent ne s'explique pas complétement sur cette difficulté, mais il regarde le prétendu théorème comme n'étant nullement indispensable à la théorie des séries, en quoi il a parfaitement raison.

La démonstration du théorème III (p. 9), relatif aux séries de la forme $r_0 + r_1 \sin\theta + r_2 \sin 2\theta, \ldots$, nous a paru être des plus ingénieuses. Viennent ensuite quelques propositions sur les séries à termes imaginaires et sur celles dont la valeur ne dépend pas de l'ordre dans lequel les termes sont écrits. C'est, je crois, Dirichlet qui a le premier montré que la valeur de certaines séries pouvait changer quand on altérait l'ordre des termes, remarque importante et qui montre avec quelle précaution on doit user des suites infinies.

Les principales règles de convergence sont présentées avec beaucoup d'ordre et démontrées avec netteté, mais l'auteur a oublié de faire voir que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\sqrt[n]{u_n}$ ont la même limite, ce qui fait rentrer le théorème V (p. 38) dans le théorème III.

Le reste de l'ouvrage est consacré à des exemples et à des applications. Nous regrettons que l'auteur ait dit (p. 75) qu'*il serait facile de démontrer que si x est entier, la série e^x est le développement d'un nombre incommensurable*. Cette manière de parler est aujourd'hui fort discréditée par suite de l'abus qu'en ont fait quelques médiocrités prétentieuses. Dans l'exemple, le théorème ne nous paraît pas du tout facile, et si M. Laurent en a une démonstration simple, il nous obligera beaucoup de nous la communiquer. Lambert le premier a fait voir, à l'aide des fractions continues, que toutes les puissances de e dont l'exposant est commensurable sont incommensurables. Sa démonstration est extrêmement ingénieuse comme tout ce qui est sorti de cet esprit si profond et si élégant. M. Liouville a ensuite démontré que e ne pouvait être racine d'une équation du deuxième degré à coefficients rationnels, démonstration simple, facile, mais non *facile à trouver*. J'ignore si l'on est allé plus loin dans cette matière.

En résumé, l'ouvrage de M. Laurent, sans rien renfermer de véritablement nouveau, nous paraît une bonne exposition d'une théorie importante, et nous le recommandons aux élèves. A part les critiques de détail que nous venons de faire, nous n'aurions que des éloges à donner à l'auteur, sans quelques passages de la préface et du livre, passages dont le ton peu convenable nous paraît devoir être relevé. Après un tableau très-exagéré des erreurs dans lesquelles sont tombés de grands géomètres à propos des séries, M. Laurent ajoute : « La théorie des séries était encore, il n'y a pas cinquante ans, un véritable chaos. Le génie seul de Cauchy parvint à lui donner une base solide. Ce grand géomètre fit ce que ni les

Newton, ni les Euler (*), ni les Bernoulli, ni les Lagrange n'avaient pu faire. Il mit de la rigueur dans l'étude des séries. On (**) raconte même à ce sujet que Laplace écoutant la lecture du premier Mémoire de Cauchy sur les séries, frappé de la justesse des idées émises par ce géomètre, rentra *effrayé* chez lui, d'où il *n'osa* sortir qu'après avoir soigneusement vérifié la convergence de toutes les séries qu'il avait employées dans sa *Mécanique céleste.* » (Préface, p. VI.)

Et plus loin :

« Lorsqu'on ouvre les écrits des auteurs de ces derniers siècles, on les voit attribuer avec une *audace remarquable* des valeurs telles que $\frac{1}{2}$ à la série $1 - 1 + 1 - 1 \ldots.$ Leibniz, pour le démontrer, etc. (p. 2). »

« Euler [*Introduction à l'analyse des infiniment petits* (***)], Lacroix [*Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (****)], reproduisent *hardiment* l'erreur de Leibniz (p. 3). »

M. Laurent ne fera croire à personne qu'il ait été au-dessus des forces d'un Newton ou d'un Leibniz de mettre de la rigueur dans l'étude des séries. Ils ont accompli des choses bien plus difficiles. Quant à l'auteur de la *Mécanique céleste,* ce serait donc à son insu qu'il n'aurait employé que des séries convergentes et, sans un heureux hasard, le grand monument qu'il avait élevé aurait pu s'écrouler comme un château de cartes? Cela n'est vraiment pas soutenable.

(*) L'ordre chronologique demandait qu'Euler fût placé entre Bernoulli et Lagrange.

(**) Qui?

(***) Quel volume? quelle page?

(****) Quel volume? quelle page? Il faudrait au moins citer exactement ceux que l'on critique.

Si M. Laurent, qui est très-jeune et dont l'érudition n'est que de seconde main, avait eu recours aux sources originales, il se serait bien gardé de parler d'une manière aussi irrévérencieuse de l'*audace* de Leibniz et de la *hardiesse* d'Euler. Non-seulement la lecture des ouvrages de ces grands hommes l'aurait rendu indulgent pour leurs erreurs, mais encore elle lui aurait montré combien sa critique est mal fondée. Si Leibniz et Euler avaient dit : « J'appelle somme de la série $1-1+1-1+1\ldots$ la *limite* vers laquelle tend la somme de ses termes quand on en prend un nombre de plus en plus grand, et je vais démontrer que cette somme est $\frac{1}{2}$ », ils auraient avancé une chose parfaitement absurde. Mais telle n'était point leur pensée. Leibniz (*) part d'un problème qui conduit, lorsque x est moindre que 1, à la série

$$1-x+x^2-x^3+\ldots;$$

puis faisant converger x vers 1, il voit que la solution tend vers $\frac{1}{2}$, valeur par laquelle il remplace la série générale devenue dans ce cas $1-1+1-1+\ldots$. En second lieu il se pose un problème de probabilité qui conduit à la même série et il trouve encore $\frac{1}{2}$. Tout cela est loin d'être absurde. Quant à Euler, je n'ai pas sous les yeux les passages dont parle M. Laurent. Mais le grand analyste s'est expliqué lui-même sur le sens qu'il attribuait à la somme d'une série divergente ; c'est pour lui la valeur de la fonction dont le développement donne la série (**). On peut s'exprimer et il est même préférable de s'expri-

(*) *Epistola ad Christanum Wolfium circa scientiam infiniti* (*Act. Erud.*, suppl. ad. t. V, 1713.

(**) MONTUCLA, *Histoire des Mathématiques*, 2e édit., t. III, p. 221.

mer autrement; mais je ne vois rien là de contraire à la plus sévère logique. Ainsi voilà Leibniz et Euler hors de cause.

Je trouve à la page 2 une excellente explication du paradoxe de la série $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}$. J'étonnerais bien M. Laurent si je lui disais que cette explication, aujourd'hui tombée dans le domaine public, est d'un auteur de l'un de ces siècles d'ignorance qui ont précédé Cauchy. En 1696, Jacques Bernoulli dans une thèse sur les séries (*), après avoir montré qu'on a

$$\frac{l}{m+n} = \frac{l}{m} - \frac{ln}{m^2} + \frac{ln^2}{m^3} \cdots$$

saltem si ponatur $m > n$, ajoute un peu plus loin : *Ratio autem paradoxi* $\frac{l}{2m} = \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m} \cdots$ *est quod continuata divisione ipsius* l *per* $m + m$, *residuum divisionis non minuitur, sed perpetuo ipsi* l *æquale manet : unde quotiens divisionis proprie non est* sola *series* $\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} \cdots$ *sed* $\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} \cdots, + vel - \frac{l}{2m}$ *faciendo*. Et cependant Jacques Bernoulli est un de ceux auxquels M. Laurent reproche de n'avoir pas su mettre de la rigueur dans l'étude des séries.

Nous pourrions encore citer un Mémoire de Varignon (**) sur les précautions à prendre dans l'emploi des séries, pour savoir quand elles donnent vrai ou quand elles donnent faux, les règles de convergence de Maclaurin, d'Euler, etc.; mais en voilà assez pour montrer que les reproches adressés aux prédécesseurs de Cauchy n'étaient pas mérités ou ne pouvaient s'appliquer qu'à

(*) *Opera*, p. 752.
(**) *Académie des Sciences*, 1715, p. 202.

des auteurs du second ordre. Si nous avons insisté là-dessus, ce n'est pas pour donner une facile leçon d'histoire à M. Laurent, encore moins pour causer de la peine à un jeune homme dont les succès nous seront toujours chers; mais nous tenions à prémunir les jeunes lecteurs contre des assertions tranchantes qu'ils ne peuvent contrôler actuellement Il ne faut pas laisser perdre le respect que nous devons aux créateurs de la science. Imitons-les si nous le pouvons, mais ne cessons jamais de les honorer.

P.