Nouvelles annales de mathématiques

Problèmes sur les surfaces du second ordre. Ligne des courbures semblables

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 231-236

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__231_1>

PROBLÈMES SUR LES SURFACES DU SECOND ORDRE. LIGNE DES COURBURES SEMBLABLES.

PROBLÈME I. — *Mener par le centre de la surface du second degré*

(1) $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

un plan représenté par l'équation

(2) $$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \quad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1),$$

de telle sorte que la section S *soit une conique semblable à une conique donnée.*

Soient $2E$ et $2F$ les axes de la section cherchée. Comme cette courbe doit être semblable à une conique donnée, le rapport $\frac{E}{F}$ est une quantité connue. Afin que les deux axes entrent d'une manière symétrique dans le calcul, nous poserons

$$\lambda = \frac{E}{F} + \frac{F}{E} = \frac{E^2 + F^2}{EF}.$$

ou

$$(3) \qquad \lambda^2 = \frac{(E^2 + F^2)^2}{E^2 F^2}.$$

Le paramètre λ^2, qui définit l'espèce de la section, sera positif ou négatif selon que cette section sera une ellipse ou une hyperbole. En particulier on aura $\lambda^2 = 4$ dans le cas d'un cercle; $\lambda^2 = 0$, dans le cas d'une hyperbole équilatère; $\lambda^2 = \infty$ dans le cas d'une parabole.

Pour exprimer λ^2 en fonction des données du problème, je fais la projection S' de la conique S sur le plan des yz. L'équation de cette projection sera

$$A\left(\frac{\beta y + \gamma z}{\alpha}\right)^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

ou bien

$$(A\beta^2 + B\alpha^2)y^2 + (A\gamma^2 + C\alpha^2)z^2 + 2A\beta\gamma yz = \alpha^2.$$

Si l'on nomme $2e$ et $2f$ les axes de S', on aura

$$\frac{1}{e^2} + \frac{1}{f^2} = \frac{A(\beta^2 + \gamma^2) + (B + C)\alpha^2}{\alpha^2} = \frac{(B + C - A)\alpha^2 + A}{\alpha^2}$$

$$\frac{1}{e^2 f^2} = \frac{(A\beta^2 + B\alpha^2)(A\gamma^2 + C\alpha^2) - A\beta^2\gamma^2}{\alpha^4}$$

$$= \frac{BC\alpha^2 + AC\beta^2 + AB\gamma^2}{\alpha^2}.$$

On aura donc

$$e^2 f^2 = \frac{\alpha^2}{BC\alpha^2 + AC\beta^2 + AB\gamma^2},$$

$$e^2 + f^2 = \frac{(B + C - A)\alpha^2 + A}{BC\alpha^2 + AC\beta^2 + AB\gamma^2}.$$

Remarquons en passant que la valeur de $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{f^2}$ ne dépend que de α, ce qui donne le théorème : *La somme des carrés des inverses des axes est la même pour toutes les sections dont les plans font le même angle avec l'un des axes principaux de la surface.*

Si l'on représente par $2e'$, $2f'$, $2e''$, $2f''$ les axes des projections de la conique S sur les deux autres plans coordonnés, on aura de même

$$e'^2 f'^2 = \frac{\beta^2}{BC\alpha^2 + AC\beta^2 + AB\gamma^2},$$

$$e''^2 f''^2 = \frac{\gamma^2}{BC\alpha^2 + AC\beta^2 + AB\gamma^2},$$

$$e'^2 + f'^2 = \frac{(A + C - B)\beta^2 + B}{BC\alpha + AC\beta^2 + AB\gamma^2},$$

$$e''^2 + f''^2 = \frac{(A + B - C)\gamma^2 + C}{BC\alpha^2 + AC\beta^2 + AB\gamma}.$$

Donc, en vertu des relations (question 634, p. 24)

$$E^2 F^2 = e^2 f^2 + e'^2 f'^2 + e''^2 f''^2,$$

$$2E^2 + 2F^2 = e^2 + f^2 + e'^2 + f'^2 + e''^2 + f''^2,$$

nous aurons

$$E^2 F^2 = \frac{1}{BC\alpha^2 + AC\beta^2 + AB\gamma^2},$$

$$E^2 + F^2 = \frac{A\alpha'^2 + B\beta'^2 + C\gamma'^2}{BC\alpha^2 + AC\beta^2 + AB\gamma^2},$$

en posant

$$\alpha'^2 = 1 - \alpha^2, \quad \beta'^2 = 1 - \beta^2, \quad \gamma'^2 = 1 - \gamma^2.$$

De là on déduit $\dfrac{(E^2+F^2)^2}{E^2F^2}$, ou

$$(3) \qquad \lambda^2 = \frac{(A\alpha'^2 + B\beta'^2 + C\gamma'^2)^2}{BC\alpha^2 + AC\beta^2 + AB\gamma^2}.$$

Telle est la relation qui doit exister entre les cosinus α, β, γ, qui déterminent la direction du plan sécant, pour que la section soit semblable à la conique dont la forme est déterminée par le paramètre λ^2.

Remarques. — Les sections faites par des plans parallèles dans une surface du second degré étant semblables, l'équation (3) conviendra à la section faite par le plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta,$$

quel que soit δ.

La formule (3) conviendrait encore à la section faite par un plan quelconque dans l'un des deux paraboloïdes. Il suffirait de faire nul l'un des coefficients A, B, C.

Problème II. — *Trouver l'équation du lieu des diamètres conjugués aux plans qui remplissent les conditions du problème* I.

Soient

$$(4) \qquad \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}, \qquad (m^2+n^2+p^2=1)$$

les équations du diamètre conjugué au plan (2). On aura

$$\frac{mA}{\alpha} = \frac{nB}{\beta} = \frac{pC}{\gamma} = \sqrt{m^2A^2+n^2B^2+p^2C^2}.$$

Les valeurs de α, β, γ, tirées de ces équations et portées dans l'équation (3), donneront

$$\lambda^2 = \frac{\left(A+B+C - \dfrac{A^3m^2+B^3n^2+C^3p^2}{A^2m^2+B^2n^2+C^2p^2}\right)^2}{ABC\dfrac{Am^2+Bn^2+Cp^2}{A^2m^2+B^2n^2+C^2p^2}},$$

ou bien

$$\lambda^2 = \frac{[A^2(B+C)m^2 + B^2(A+C)n^2 + C^2(A+B)p^2]^2}{ABC\,(A\,m^2 + B\,n^2 + Cp^2)\,(A^2m^2 + B^2n^2 + C^2p^2)}.$$

Il suffira donc, pour avoir le lieu demandé, d'éliminer m, n, p entre cette équation et les équations (4), ce qui donne, en chassant le dénominateur,

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &ABC\lambda^2\,(Ax^2 + By^2 + Cz^2)\,(A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2) \\ &= [A^2(B+C)x^2 + B^2(A+C)y^2 + C^2(A+B)z^2]^2, \end{aligned} \right.$$

équation d'un cône du quatrième degré.

Problème III. — *Trouver sur une surface du second degré le lieu des points qui ont des indicatrices semblables* (*), c'est-à-dire *tels, que des plans parallèles aux plans tangents menés à la surface en ces points coupent la surface suivant des coniques semblables.*

Ce lieu est évidemment donné, pour les surfaces à centre, par l'intersection des surfaces (1) et (5). En ayant égard à l'équation (1), l'équation (5) peut être remplacée par la suivante :

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &ABC\lambda^2\,(A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2) \\ &= [A^2(B+C)x^2 + B^2(A+C)y^2 + C^2(A+B)z^2]^2. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = \frac{1}{b^2}, \quad C = \frac{1}{c^2}.$$

La quantité placée entre crochets dans l'équation (6)

(*) J'appelle ce lieu *ligne des courbures semblables*, parce que, pour deux points de cette ligne, les courbures de deux sections normales semblablement placées par rapport aux sections principales présentent un rapport constant.

pourra s'écrire

$$\frac{1}{a^2 b^2 c^2}\left[(b^2+c^2)\frac{x^2}{a^2}+(a^2+c^2)\frac{y^2}{b^2}+(a^2+b^2)\frac{z^2}{c^2}\right]$$

$$=\frac{1}{a^2 b^2 c^2}\left[(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-x^2-y^2-z^2\right],$$

$$=\frac{1}{a^2 b^2 c^2}(a^2+b^2+c^2-x^2-y^2-z^2),$$

en ayant égard à l'équation de l'ellipsoïde

$$(7)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

L'équation (6) prendra donc la forme

$$(8)\qquad a^2 b^2 c^2 \lambda^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)=(a^2+b^2+c^2-x^2-y^2-z^2)^2,$$

et la ligne des courbures semblables de l'ellipsoïde sera représentée par l'ensemble des équations (7) et (8). Quand $\lambda = 2$, l'équation (8) représente une surface qui touche l'ellipsoïde aux quatre ombilics.

Je n'examinerai pas les cas particuliers des hyperboloïdes et des paraboloïdes, qui ne peuvent présenter de difficultés après ce qu'on vient de dire. Je remarquerai seulement que le problème III comprend, comme cas particulier, les questions 638 et 639; car demander que les génératrices rectilignes d'une surface du second degré, qui passent par un point de la surface, fassent un angle donné, c'est demander que les sections faites parallèlement au plan tangent mené par ce point soient des hyperboles semblables à des hyperboles données. On voit par là qu'une question qui semblait ne concerner que les surfaces du second degré à génératrices rectilignes s'applique à toutes les surfaces de ce degré, quand on se place à un point de vue plus général. P.