DESBOVES

Note sur les normales aux surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 228-231

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__228_1>

NOTE SUR LES NORMALES AUX SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. DESBOVES.

Les nouveaux théorèmes sur les normales aux surfaces du second ordre peuvent se déduire très-simplement de quelques équations générales (*). Je me bornerai ici à un petit nombre de propositions relatives à l'ellipsoïde.

Prenons pour axes coordonnés les axes mêmes de l'ellipsoïde, et soient représentés, pour abréger, par L, M, N, R, les polynômes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1,$$

$$(b^2-c^2)yz+c^2z_0y-b^2y_0z,$$

$$(c^2-a^2)xz+a^2x_0z-c^2z_0x,$$

$$(a^2-b^2)xy+b^2y_0x-a^2x_0y,$$

(*) *Théorie nouvelle des normales aux surfaces du second ordre.* (Mallet-Bachelier, 1862). Nous rendrons prochainement compte de cet ouvrage. P.

et par l, m, n, r, des constantes arbitraires : il est facile de voir que

$$lL + mM + nN + rR = 0 \tag{1}$$

est l'équation générale de toutes les surfaces du second degré qui passent par les six pieds des normales menées du point (x_0, y_0, z_0) à l'ellipsoïde.

D'abord la surface (1) passe par les pieds des six normales. En effet, $L = 0$ est l'équation de l'ellipsoïde, et on voit facilement que les coordonnées des pieds des normales partant du point x_0, y_0, z_0 doivent satisfaire aux équations

$$M = 0, \quad N = 0, \quad R = 0.$$

La surface (1) passe d'ailleurs par trois points arbitrairement choisis, à cause des trois constantes $\frac{m}{l}$, $\frac{n}{l}$, $\frac{r}{l}$ arbitraires et distinctes. On a donc bien l'équation la plus générale.

Applications de l'équation (1).

THÉORÈME I. — *Jamais les pieds des six normales menées d'un point à l'ellipsoïde ne peuvent être sur une même sphère.*

En effet, les coefficients de x^2, y^2, z^2 dans l'équation (1) ne peuvent devenir égaux pour aucune valeur des constantes.

THÉORÈME II. — *Les six normales menées d'un point à un ellipsoïde se trouvent toujours sur un même cône du second degré.* (CHASLES.)

Il faut faire voir qu'en déterminant convenablement l, m, n, r, le point (x_0, y_0, z_0) pourra être à la fois le centre et un point de la surface.

La première condition donne les trois équations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} & ry_0 - nz_0 + \frac{2lx_0}{a^4} = 0, \\ & mz_0 - rx_0 + \frac{2ly_0}{b^4} = 0, \\ & nx_0 - my_0 + \frac{2lz_0}{c^4} = 0. \end{aligned}\right.$$

Si on les multiplie respectivement par x_0, y_0, z_0, et qu'on les ajoute membre à membre, il vient

$$2l\left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}\right) = 0,$$

et, par suite, $l = 0$.

Les équations (2) donnent alors

$$\frac{m}{x_0} = \frac{n}{y_0} = \frac{r}{z_0}.$$

On exprime ensuite, à la manière ordinaire, que le point (x_0, y_0, z_0) est sur la surface, et l'on a

$$-l + l\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}\right) = 0.$$

La condition est remplie, puisque l est nul, d'après ce qui précède, et le théorème est démontré.

Si, d'ailleurs, on veut avoir l'équation du cône, il suffira, dans l'équation (1), de remplacer l, m, n, r par $0, x_0, y_0, z_0$.

Théorème III. — *Si, d'un point quelconque, on mène les six normales à un ellipsoïde et qu'on fasse passer un plan par les pieds de trois quelconques d'entre elles, et un autre par les trois pieds restants, les coordonnées α, β, γ; α', β', γ' des pôles des deux plans sont liées par les équations*

$$\alpha\alpha' = -a^2, \quad \beta\beta' = -b^2, \quad \gamma\gamma' = -c^2.$$

THÉORÈME IV. — *Les pôles des plans dont il est question dans l'énoncé précédent se trouvent, quel que soit le point de départ des normales, sur une même surface du quatrième ordre dont l'équation est*

$$(a^2 - b^2)^2 (a^2 b^2 \gamma^2 - c^2 \alpha^2 \beta^2) + (a^2 - c^2)^2 (a^2 c^2 \beta^2 - b^2 \alpha^2 \gamma^2) + (b^2 - c^2)^2 (b^2 c^2 \alpha^2 - a^2 \beta^2 \gamma^2) = 0.$$

THÉORÈME V. — *Les plans qui ont leurs pôles sur la surface précédente sont tels, que les normales qui ont leurs pieds sur la section correspondante de l'ellipsoïde se coupent trois à trois sur une même droite.*

Les trois théorèmes que nous venons d'énoncer s'établissent immédiatement, et pour ainsi dire sans calcul, en identifiant l'équation (1) et la suivante :

$$\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1\right)\left(\frac{\alpha' x}{a^2} + \frac{\beta' y}{b^2} + \frac{\gamma' z}{c^2} - 1\right) = 0.$$

Pour étudier de plus près le problème des normales menées des différents points d'une section de l'ellipsoïde, on prend une nouvelle équation générale obtenue comme l'équation (1), mais en choisissant comme axes coordonnés les axes mêmes de l'ellipse de section et une perpendiculaire à son plan menée par son centre.