

EUGÈNE BELTRAMI

Seconde solution de la question 624

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 209-212

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_209_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 624

(voir 2^e série, t. I^{er}, p. 345);

PAR M. EUGÈNE BELTRAMI.

Un angle trièdre trirectangle mobile a son sommet en un point fixe pris sur une surface quelconque du second ordre; le plan déterminé par les intersections de ses trois arêtes avec cette surface passe constamment par un même point de la normale issue du sommet fixe de l'angle trièdre. On demande le lieu de ce point, lorsque le sommet du trièdre parcourt la surface donnée.

(MANNHEIM.)

Soient

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$

l'équation de la surface, (x_0, y_0, z_0) un quelconque de ses points; on aura identiquement

$$(1) \quad ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 = 1.$$

En désignant par δ la distance de l'origine au plan tangent en ce point, les cosinus des angles que la normale fait avec les axes des x , y et z , seront respectivement

$$-\delta ax_0, \quad -\delta by_0, \quad -\delta cz_0.$$

Cela posé, concevons un nouveau système d'axes orthogonaux des ξ , η et ζ , ayant leur origine au point (x_0, y_0, z_0) et formant avec les axes primitifs des angles dont les cosinus sont indiqués dans le tableau suivant :

	ξ	η	ζ
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

En nommant λ , μ , ν les cosinus des angles que la normale fait avec ces nouveaux axes, on aura

$$(2) \quad \begin{cases} \lambda = -\delta(a\alpha_1 x_0 + b\beta_1 y_0 + c\gamma_1 z_0), \\ \mu = -\delta(a\alpha_2 x_0 + b\beta_2 y_0 + c\gamma_2 z_0), \\ \nu = -\delta(a\alpha_3 x_0 + b\beta_3 y_0 + c\gamma_3 z_0), \end{cases}$$

et les équations des droites ξ , η et ζ , rapportées aux premiers axes, seront respectivement

$$\begin{cases} x = x_0 + \xi\alpha_1, \\ y = y_0 + \xi\beta_1, \\ z = z_0 + \xi\gamma_1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_0 + \eta\alpha_2, \\ y = y_0 + \eta\beta_2, \\ z = z_0 + \eta\gamma_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_0 + \zeta\alpha_3, \\ y = y_0 + \zeta\beta_3, \\ z = z_0 + \zeta\gamma_3, \end{cases}$$

dans chacune desquelles les variables des deux systèmes se rapportent au même point de l'espace.

Au moyen de ces équations et des équations (1) et (2), on trouve, pour les intersections des trois nouveaux axes

avec la surface, les valeurs suivantes de ξ , η et ζ , que nous désignerons par ξ_0 , η_0 et ζ_0 :

$$\frac{1}{\xi_0} = \frac{\delta(a\alpha_1^2 + b\beta_1^2 + c\gamma_1^2)}{2\lambda},$$

$$\frac{1}{\eta_0} = \frac{\delta(a\alpha_2^2 + b\beta_2^2 + c\gamma_2^2)}{2\mu},$$

$$\frac{1}{\zeta_0} = \frac{\delta(a\alpha_3^2 + b\beta_3^2 + c\gamma_3^2)}{2\nu},$$

de sorte que l'équation, en ξ , η et ζ , du plan mené par ces trois points, pourra se mettre sous la forme

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\xi(a\alpha_1^2 + b\beta_1^2 + c\gamma_1^2)}{\lambda} + \frac{\eta(a\alpha_2^2 + b\beta_2^2 + c\gamma_2^2)}{\mu} \\ + \frac{\zeta(a\alpha_3^2 + b\beta_3^2 + c\gamma_3^2)}{\nu} = \frac{2}{\delta}. \end{array} \right.$$

Or, l'équation de la normale étant

$$\frac{\xi}{\lambda} = \frac{\eta}{\mu} = \frac{\zeta}{\nu} = r,$$

la distance r_0 du point (x_0, y_0, z_0) au point d'intersection avec le plan (3) est donnée par la formule

$$r_0 = \frac{2}{\delta(a+b+c)},$$

et comme celle-ci est indépendante de la direction des droites ξ , η et ζ , la première partie de la question se trouve ainsi démontrée.

Si maintenant on désigne par x , y , z les coordonnées (relatives aux premiers axes) du point que l'on vient de déterminer, on a

$$x = x_0 - \frac{2ax_0}{a+b+c}, \quad y = y_0 - \frac{2by_0}{a+b+c},$$

$$z = z_0 - \frac{2cz_0}{a+b+c},$$

d'où l'on tire

$$x_0 = \frac{a+b+c}{-a+b+c} x, \quad y_0 = \frac{a+b+c}{a-b+c} y, \quad z_0 = \frac{a+b+c}{a+b-c} z.$$

En éliminant x_0, y_0, z_0 au moyen de l'équation (1), on obtient enfin

$$\frac{a(a+b+c)^2}{(-a+b+c)^2} x^2 + \frac{b(a+b+c)^2}{(a-b+c)^2} y^2 + \frac{c(a+b+c)^2}{(a+b-c)^2} z^2 = 1,$$

équation du lieu cherché, qui, partant, est une surface de second ordre, ayant en commun avec la première le centre et la direction des axes.
