NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solution de la question 637

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 184-189

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__184_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SOLUTION DE LA QUESTION 637

PAR M. GR.... (POITIERS.)

Soient : x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point fixe de la face opposée au sommet libre ; x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 ; x_3, y_3, z_3 celles des trois autres points fixes ;

$$\begin{aligned}
X &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1,\\
Y &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2,\\
Z &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3,
\end{aligned}$$

trois polynômes qui égalés à zéro donneront les équations des trois plans fixes. Je représenterai le résultat de la substitution, dans un de ces polynômes, des coordonnées d'un point, en donnant l'indice commun de ses coordonnées à la lettre qui représente ce polynôme.

Cela posé, soit

$$\lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) + \nu(z - z_0) = 0$$

l'équation d'un plan quelconque passant par le point (0); les trois autres faces d'un tétraèdre admettant ce plan pour base, et construit d'après les conditions de l'énoncé, ont évidemment pour équations

$$\frac{\lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) + \nu(z - z_0)}{\lambda(x_1 - x_0) + \mu(y_1 - y_0) + \nu(z_1 - z_0)} = \frac{X}{X_1},$$

$$\frac{\lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) + \nu(z - z_0)}{\lambda(x_2 - x_0) + \mu(y_2 - y_0) + \nu(z_2 - z_0)} = \frac{Y}{Y_2},$$

$$\frac{\lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) + \nu(z - z_0)}{\lambda(x_3 - x_0) + \mu(y_3 - y_0) + \nu(z_3 - z_0)} = \frac{Z}{Z_3}.$$

Il suffit d'éliminer λ, μ, ν entre ces trois équations pour avoir l'équation du lieu; mais ces équations étant homogènes et du premier degré, il suffit pour cela d'égaler à 0 le déterminant

$$\begin{vmatrix} (x - x_0)X_1 - (x_1 - x_0)X & (y - y_0)X_1 - (y_1 - y_0)X & (z - z_0)X_1 - (z_1 - z_0)X \\ (x - x_0)Y_2 - (x_2 - x_0)Y & (y - y_0)Y_2 - (y_2 - y_0)Y & (z - z_0)Y_2 - (z_2 - z_0)Y \\ (x - x_0)Z_3 - (x_3 - x_0)Z & (y - y_0)Z_3 - (y_3 - y_0)Z & (z - z_0)Z_3 - (z_3 - z_0)Z \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation montre déjà que le lieu est du troisième degré et passe par les points (1), (2), (3); mais elle peut considérablement se simplifier. Chaque terme étant la somme de deux quantités, il suffit de développer par lignes; on obtiendra ainsi huit déterminants en prenant chacun des termes d'une ligne avec ceux d'une autre; mais quatre de ces déterminants sont nuls, comme ayant deux ou trois lignes égales. Il restera

$$
\begin{aligned}
&X_1 YZ \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix}
+ Y_2 XZ \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} \\
&+ Z_3 XY \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix}
- XYZ \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0;
\end{aligned}
$$

ou, plus simplement,

$$
(1)\left\{
\begin{aligned}
&X_1 YZ \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}
+ Y_2 XZ \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \\
&+ Z_3 XY \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix}
- XYZ \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Il est facile d'étudier les sections de cette surface par les plans principaux qui se présentent naturellement dans le problème :

1° Par l'un des plans fixes donnés; soit $Z = 0$.

L'équation (1) se décompose alors en

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui montre que les droites résultant des intersections des plans fixes entre eux, et de chacun d'eux avec le plan passant par le point (o) et les deux points situés dans les faces dont aucune arête n'est dans le plan considéré, que ces droites, dis-je, sont sur la surface.

2° Par le plan (0, 1, 2) ou

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix} = 0.$$

On a $Z = 0$ et une courbe du second ordre

$$X_1 Y \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + Y_2 X \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = XY \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

dont on connaît cinq points (1, 2 et les trois intersections entre elles des traces des plans fixes donnés sur le plan en question).

On peut aussi examiner ce que devient la surface dans divers cas particuliers.

Particulièrement, supposons que les quatre points fixes donnés soient dans un même plan : le tétraèdre formé avec ces quatre points comme sommets est nul; par suite le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

qui en exprime le volume à un facteur constant près, est nul.

Les trois autres déterminants exprimant, au même facteur constant près, les volumes de tétraèdres ayant leur sommet au point décrivant le lieu, et leurs bases sur le plan des quatre points fixes, sont proportionnels aux produits de la perpendiculaire P abaissée de ce point sur le plan des points fixes, par les surfaces des triangles qui forment les bases de ces tétraèdres. Je désignerai ces bases en mettant entre parenthèses les indices des sommets; l'équation de la surface s'écrit donc

$$P[X_1(0, 2, 3)YZ + Y_2(0, 1, 3)XZ + Z_3(0, 1, 2)XY] = 0.$$

On parvient à la même équation en remarquant que chacun de ces déterminants égalé à 0 donne l'équation du plan des points fixes. Ces polynômes sont donc égaux au produit de la perpendiculaire déja désignée par P par la racine carrée de la somme des carrés des coefficients des variables, c'est-à-dire par

$$\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & y_0 & z_0 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2 + \ldots}$$

et le théorème des projections des surfaces montre que ce radical est égal à (0, 2, 3).

La perpendiculaire, P, égalée à 0 donne le plan des points; et le second facteur de l'équation, une surface conique du second degré, si les trois plans fixes se coupent en un même point; sinon, il faut que l'un des plans soit parallèle à l'intersection des deux autres, et, en substituant à Z, $X+Y+\alpha$, on reconnaît que la surface est un cylindre. Cette substitution n'abaisserait pas le degré de l'équation générale.