E. Hans

Solutions des questions 638 et 639

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 152-156
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__152_1>

SOLUTIONS DES QUESTIONS 638 ET 639;

PAR M. E. HANS,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Question 638.

Soient M un point du lieu; O le centre de l'hyperboloïde, et $OM = a'$. Je prends pour axe des x la droite OM, pour axes des y et des z les axes de l'hyperbole conjuguée; l'équation de la surface sera

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = 1.$$

L'intersection de l'hyperboloïde par le plan $x = a'$ est le système des deux droites $y = \pm \frac{b'}{c'} z$; ces deux droites devant faire un angle constant V, on a

$$(1) \qquad \operatorname{tang} V = \frac{2b'c'}{c'^2 - b'^2}.$$

Prenons maintenant pour axes de coordonnées les trois axes de l'hyperboloïde, et nommons x, y, z les coordonnées du point M, rapporté à ce nouveau système. En désignant par a, b, c les demi-axes de l'hyperboloïde, on aura

$$a'^2 + b'^2 - c'^2 = a^2 + b^2 - c^2, \quad a'^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

d'où

$$(2) \qquad c'^2 - b'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2 - c^2).$$

Le parallélipipède construit sur les demi-diamètres conjugués a même volume que celui qui est construit sur les demi-axes; sa base est $b'c'$, et sa hauteur est la distance de l'origine au plan tangent

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} - \frac{zZ}{c^2} = 1.$$

Cette hauteur a donc pour expression

$$\pm \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

Donc

$$abc = \pm \frac{b'c'}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

d'où

$$(3) \qquad b'c' = \pm abc\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

Remplaçant, dans l'équation (1), $b'c'$ et $c'^2 - b'^2$ par leurs valeurs (3) et (2), il vient

$$(4) \qquad \operatorname{tang} V = \frac{\pm 2abc\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}{x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2 - c^2)}.$$

Le lieu cherché est donc déterminé par l'intersection de l'hyperboloïde et d'une surface du quatrième degré que l'équation (4) représente.

Quand l'angle donné V est droit, l'équation (4) se réduit à

$$x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2 - c^2) = 0,$$

et, dans ce cas, le lieu est déterminé par l'intersection de l'hyperboloïde et d'une sphère.

On voit à priori qu'il n'y aura de lieu réel qu'autant que l'angle donné ne surpassera pas le plus grand angle formé par deux des génératrices du cône asymptote.

Question 639.

La solution de ce problème se déduit de celle du problème précédent. En effet, on obtient l'équation

$$\frac{y^2}{2p} - \frac{z^2}{2q} = x$$

du paraboloïde hyperbolique, en transportant l'origine au sommet ($x = -a, y = 0, z = 0$), de l'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

faisant tendre a vers l'infini, et posant

$$\lim \frac{b^2}{a} = p, \qquad \lim \frac{c^2}{a} = q.$$

Dans le cas de l'hyperboloïde, le lieu appartient à la surface

$$(\operatorname{tang} V)\left[x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2 - c^2)\right]$$
$$= \pm 2abc\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

Transportant l'origine au sommet, cette équation devient

$$(\operatorname{tang} V)\left[(x-a)^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2 - c^2)\right]$$
$$= \pm 2abc\sqrt{\frac{(x-a)^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

Élevant au carré et simplifiant

$$(\operatorname{tang}^2 V)(x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - b^2 + c^2)^2$$
$$= 4a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} - \frac{2x}{a^3} + \frac{1}{a^2}\right).$$

Divisant les deux membres par a^2,

$$(\operatorname{tang}^2 V)\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a} - 2x - \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a}\right)^2$$
$$= 4\frac{b^2}{a}\cdot\frac{c^2}{a}\cdot\frac{1}{a^2}x^2 + 4\frac{c^2}{b^2}y^2 + 4\frac{b^2}{c^2}z^2 - 8.\frac{b^2}{a}\cdot\frac{c^2}{a}\frac{1}{a}x + 4.\frac{b^2}{a}\cdot\frac{c^2}{a}.$$

Pour $a = \infty$,

$$\frac{b^2}{a} = p, \quad \frac{c^2}{a} = q, \quad \frac{b^2}{c^2} = \frac{p}{q}, \quad \frac{c^2}{b^2} = \frac{q}{p};$$

l'équation se réduit à

$$(1) \quad (\text{tang}^2 V)(-2x-p+q)^2 = 4\cdot\frac{q}{p}y^2 + 4\cdot\frac{p}{q}z^2 + 4pq,$$

et elle représente un hyperboloïde. Le lieu cherché est donc déterminé par l'intersection de cet hyperboloïde et du paraboloïde donné.

Lorsque l'angle V est droit, l'équation (1) donne

$$(-2x-p+q) = 0,$$

équation qui représente un plan parallèle au plan des yz. Dans ce cas, le lieu est une hyperbole. Si on a de plus $p = q$, le lieu se compose de deux droites.