NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES VACOSSIN

Question d'examen - École polytechnique (1862)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 10-12

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__10_1>

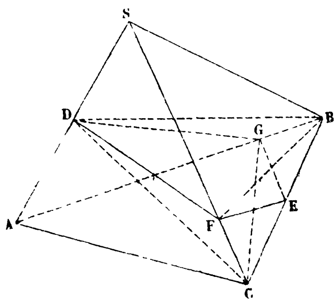
QUESTION D'EXAMEN — ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1862);

SOLUTION DE M. GEORGES VACOSSIN,
Élève en spéciales (institution Loriol).

THÉORÈME. — *Tout plan passant par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre le décompose en deux parties équivalentes.*

Ce théorème, démontré dans les auteurs par les propriétés du quadrilatère gauche, peut aussi être établi par les considérations suivantes.

Soit DFEG un plan passant par les points milieux D,



E des côtés opposés du tétraèdre S, ABC. Ce plan détermine deux pentaèdres équivalents.

Traçons les deux plans DCG, DBF : le pentaèdre inférieur est décomposé en deux pyramides D, ACG, C, DFEG respectivement équivalentes aux deux pyramides D, SFB, B, DFEG qui composent le pentaèdre supérieur.

En effet, les pyramides quadrangulaires de même base DFEG ont même hauteur, car le plan de cette base passe par le milieu de la droite des sommets; par suite ces pyramides sont équivalentes. En second lieu, D, ACG est la moitié de S, ACG; D,SFB est aussi la moitié de A,SFB. En outre, S, ACG est équivalente à A, SFB : car soient V le volume du tétraèdre donné, d, d' les distances du plan sécant aux sommets A ou S, B ou C, on a

$$\frac{\text{S, ACG}}{\text{V}} = \frac{\text{ACG}}{\text{ACB}} = \frac{\text{AG}}{\text{AB}} = \frac{d}{d+d'},$$

$$\frac{\text{A, SFB}}{\text{V}} = \frac{\text{BSF}}{\text{SBC}} = \frac{\text{SF}}{\text{SC}} = \frac{d}{d+d'}.$$

Donc S, ACG est équivalente à A, SBF, et de ces deux résultats on conclut l'équivalence des pentaèdres.

Observations. — I. Des égalités précédentes, on conclut pour la mesure des deux tétraèdres

$$\text{D, ACG} = \text{D, SFB} = \frac{\text{V}d}{2(d+d')}$$

et pour leur somme $\frac{\text{V}d}{(d+d')}$.

A désignant l'aire de la section, on a pour les volumes des pyramides quadrangulaires

$$\text{C, DFEG} = \text{B, DFEG} = \frac{d'\text{A}}{3}.$$

Comme ces quatre pyramides composent V,

$$V = \frac{Vd}{d + d'} + \frac{2d'A}{3}$$

et

$$V = \frac{2}{3}(d + d')A.$$

II. Si D désigne la longueur de l'arête AB, α l'inclinaison de D sur le plan sécant,

$$d + d' = D\sin\alpha, \quad V = \frac{2}{3}D\sin\alpha . A.$$

III. Si le plan tourne, D et V restant constants,

$$A = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{D} \cdot \frac{1}{\sin\alpha};$$

donc A varie en raison inverse de $\sin\alpha$.