F. YLLIAC

# Question 634

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 2 (1863), p. 105-107

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__105_0>

## QUESTION 634

SOLUTION DE M. F. YLLIAC.

*Si l'on appelle* E, F, *les axes d'une ellipse;* $e, f$; $e', f'$; $e'', f''$ *les axes de ses projections sur trois plans rectangulaires, on a*

$$2E^2 + 2F^2 = e^2 + f^2 + e'^2 + f'^2 + e''^2 + f''^2,$$
$$E^2F^2 = e^2f^2 + e'^2f'^2 + e''^2f''^2. \qquad \text{(P.)}$$

Soient $e_1$, $f_1$; $e'_1$, $f'_1$; $e''_1$, $f''_1$, les projections des axes E, F sur trois plans rectangulaires; on a, d'après un théorème connu

$$2E^2 = e_1^2 + e'^2_1 + e''^2_1,$$
$$2F^2 = f_1^2 + f'^2_1 + f''^2_1 \ (*),$$

et, en ajoutant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$2E^2 + 2F^2 = (e_1^2 + f_1^2) + (e'^2_1 + f'^2_1) + (e''^2_1 + f''^2_1).$$

Mais on sait que les projections des axes d'une ellipse sur un plan sont des diamètres conjugués de la projection de l'ellipse; donc, en vertu de l'égalité de la somme des carrés des axes et de la somme des carrés de deux

(*) Nous avons rétabli, dans les premiers membres de ces deux égalités, le facteur 2 qui ne se trouve pas dans la rédaction de M. Ylliac. C'est cette omission qui a fait supposer à M. Ylliac qu'il y avait une erreur dans l'énoncé de la question proposée. Le théorème *connu* sur lequel se fondent les deux égalités dont il s'agit consiste en ce que la somme des carrés des projections d'une droite sur trois plans rectangulaires est le double du carré de la droite projetée. G.

diamètres conjugués d'une même ellipse, on a

$$e^2+f^2=e_1^2+f_1^2,\ e'^2+f'^2=e_1'^2+f_1'^2,\ e''^2+f''^2=e_1''^2+f_1''^2;$$

et, par suite,

$$2E^2+2F^2=e^2+f^2+e'^2+f'^2+e''^2+f''^2.$$

Pour démontrer la seconde partie de la proposition, je désigne par S l'aire du rectangle des axes de l'ellipse donnée, et par $s$, $s'$, $s''$ les aires des projections de ce rectangle. Alors on a, comme l'on sait :

$$(1)\qquad S^2=s^2+s'^2+s''^2.$$

Mais $s$, $s'$, $s''$ sont les aires des parallélogrammes construits sur les projections des axes sur les trois plans, et, par suite, les aires des parallélogrammes construits sur des diamètres conjugués des ellipses projections de l'ellipse donnée. Or, ces aires sont égales, dans chaque ellipse, au rectangle des axes; on a donc

$$s=ef,\quad s'=e'f',\quad s''=e''f'';$$

d'ailleurs

$$S=EF.$$

En remplaçant, dans l'égalité (1), S, $s$, $s'$, $s''$ par leurs valeurs, il vient :

$$E^2F^2=e^2f^2+e'^2f'^2+e''^2f''^2.$$

Pour cette seconde partie, on aurait pu raisonner ainsi qu'il suit : l'aire de l'ellipse donnée est $\frac{\pi.E.F}{4}$ ; les aires des projections sont

$$\frac{\pi.e.f}{4},\quad \frac{\pi.e'.f'}{4},\quad \frac{\pi.e''.f''}{4};$$

donc, en vertu du théorème relatif aux projections des airés planes,

$$\left(\frac{\pi.\mathrm{E}.\mathrm{F}}{4}\right)^2 = \left(\frac{\pi.e\,f}{4}\right)^2 + \left(\frac{\pi\,e'.f'}{4}\right)^2 + \left(\frac{\pi.e''.f''}{4}\right)^2;$$

d'où, en supprimant le facteur commun $\frac{\pi^2}{16}$,

$$\mathrm{E}^2\mathrm{F}^2 = e^2 f^2 + e'^2 f'^2 + e''^2 f''^2.$$

C. Q. F. D.

*Note du Rédacteur.* — Une solution peu différente nous a été adressée de Lyon, dans une lettre anonyme; la même question a été résolue par M. A. M., élève du lycée de Douai, par MM. Laisant, sous-lieutenant du génie, licencié ès Sciences; Pelletreau, Rouquet; Melon, élève du collége Rollin, et par M. Moulin, répétiteur au Prytanée impérial de la Flèche.