NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VINCENZO JANNI

Théorème sur les cercles osculateurs à une ellipse

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 80-82

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__80_1>

THÉORÈME SUR LES CERCLES OSCULATEURS A UNE ELLIPSE;

PAR M. VINCENZO JANNI.

Par chaque point d'une ellipse passent toujours trois cercles osculateurs à trois points de la courbe, et l'aire du triangle qui a pour sommets ces points est constante.

Soit x', y' un point de l'ellipse

$$a^2y^2 + h^2x^2 = a^2h^2,$$

la corde commune à l'ellipse et au cercle osculateur qui passe par x', y' est

$$y - y' = \frac{h^2}{a^2}\frac{x'}{y'}(x - x');$$

éliminant y ou x, on a

$$4x'^3 - 3a^2x' - a^2x = 0, \quad 4y'^3 - 3h^2y' - h^2y = 0.$$

Or si nous regardons fixe le point x, y, il y a trois points x', y' dont les cercles osculateurs passent par x, y; parce que x', y' sont donnés par des équations du troisième degré qui ont les racines toujours réelles, elles sont identiques à l'équation qui sert à partager un angle donné en trois parties égales. Or en mettant

$$\frac{x}{a} = \cos\varphi,$$

on a

$$\frac{y}{h} = \sin\varphi.$$

Donc les racines des deux équations ci-dessus seront

$$x' = a\cos\frac{1}{3}\varphi,$$

$$x'' = a\cos\frac{1}{3}(360^\circ - \varphi),$$

$$x''' = a\cos\frac{1}{3}(360^\circ + \varphi);$$

$$y' = h\cos\frac{1}{3}(270^\circ + \varphi),$$

$$y'' = h\cos\frac{1}{3}(90^\circ - \varphi),$$

$$y''' = h\cos\frac{1}{3}(450^\circ - \varphi).$$

Substituant ces valeurs dans la formule

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

parce qu'on a

$$x' + x'' + x''' = 0, \quad y' + y'' + y''' = 0,$$

on obtient la surface du triangle $= \frac{3}{4} ah \sqrt{3}$.