NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VINCENZO JANNI

Problème sur une conique passant par quatre points donnés

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 77-78

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__77_1>

PROBLÈME SUR UNE CONIQUE PASSANT PAR QUATRE POINTS DONNÉS;

PAR M. VINCENZO JANNI (DE NAPLES).

Construire la conique qui, passant par quatre points donnés, soit perpendiculaire à une droite donnée.

Soient

$$y - ax - h = o, \quad y - a'x - h' = o,$$

les équations de deux côtés opposés du quadrilatère qui a pour sommets les points donnés, et

$$y - \alpha x - \beta = o, \quad y - \alpha x - \beta' = o,$$

celles des autres côtés. L'équation d'une conique quelconque qui passe par les quatre points sera de la forme

$$\begin{gathered}(y - ax - h)(y - a'x - h') \\ + k(y - \alpha x - \beta)(y - \alpha' x - \beta') = o.\end{gathered}$$

Prenons la droite donnée pour axe des x, et concevons que l'origine soit le point inconnu où la conique doit couper la droite donnée; alors h, h', β, β' seront des quantités inconnues qui doivent satisfaire aux deux relations

$$hh' + k\beta\beta' = o, \quad k + h' + k(\beta + \beta') = o,$$

qui donnent

$$\frac{hh'}{h+h'} = \frac{\beta\beta'}{\beta+\beta'}.$$

Cela posé, soient AC, BC deux côtés opposés du quadrilatère et AB la droite donnée; si nous recherchons la courbe dont les ordonnées perpendiculaires à la droite AB soient égales à $\frac{hh'}{h+h'}$, on voit qu'elle est une hyperbole qui passe par les points A, B, et O milieu de la perpendiculaire CP à AB, et qui a pour son asymptote la droite MN perpendiculaire à AB, et pour laquelle on a MH = HN : la courbe est donc déterminée.

De la même manière on construit l'hyperbole dont les ordonnées perpendiculaires à la droite AB soient égales à $\frac{\beta\beta'}{\beta+\beta'}$; et il est clair que les pieds des perpendiculaires abaissées des points d'intersection de ces deux courbes sur la droite AB sont chacun un cinquième point de la conique cherchée. Puisque les deux hyperboles ont deux asymptotes parallèles, on n'a que trois solutions.