NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HOUSEL

# Solution de la question 611

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 1 (1862), p. 67-69

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__67_1>

## SOLUTION DE LA QUESTION 611

(voir page 48);

PAR M. HOUSEL,
Professeur.

Trouver $n$ nombres entiers et positifs dont la somme égale le produit.

Considérons d'abord le cas où ces nombres sont tous différents, et soit $a$ le plus petit d'entre eux; les autres sont $a+\alpha_1$, $a+\alpha_2,\ldots,$ $a+\alpha_{n-1}$.

La condition énoncée s'exprime par l'équation

$$a(a+\alpha_1)(a+\alpha_2)\ldots(a+\alpha_{n-1})=na+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}$$

ou bien

$$a^n+a^{n-1}\Sigma_1+a^{n-2}\Sigma_2+\ldots+a^2\Sigma_{n-2}+a.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$$
$$=na+\Sigma_1,$$

et encore

$$a(n-\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-1})$$
$$=a^n+(a^n-1)\Sigma_1+a^{n-2}\Sigma_2+\ldots+a^2\Sigma_{n-2}.$$

Le second membre est toujours positif, car $a\geqq 1$, ce qui fait que $a^n-1$ n'est jamais négatif : donc le premier membre doit être aussi positif, c'est-à-dire que

$$n>\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}.$$

Puisque tous ces nombres $\alpha_1$, $\alpha_2,\ldots,$ $\alpha_{n-1}$ sont différents d'après la supposition que nous avons faite, et que le plus grand d'entre eux, $\alpha_{n-1}$, est évidemment inférieur à $n$, on aura

$$\alpha_1=1,\quad \alpha_2=2,\ldots,\quad \alpha_{n-1}=n-1.$$

Mais l'inégalité

$$n>1.2.3\ldots(n-2)(n-1)$$

est généralement fausse, et l'on a même

$$n<(n-2)(n-1),$$

car la quantité

$$(n-2)(n-1)-n=n^2-4n+2=n(n-4)+2$$

est toujours positive pour $n>3$ et entier. Ainsi la solution est impossible à moins que l'on n'ait

$$n=3, \quad \alpha_1=1, \quad \alpha_2=2.$$

L'équation primitive devient alors

$$a(a+1)(a+2)=3a+3=3(a+1),$$

d'où l'on tire

$$(a+1)(a^2+2a-3)=0,$$

équation résolue pour $a=1$. En effet les nombres 1, 2, 3 vérifient l'énoncé.

Pour $n=2$, on aurait l'équation

$$a(a+1)=2a+1$$

ou bien

$$a^2-a-1=0,$$

qui n'a pas de racine entière.

Donc enfin les nombres 1, 2, 3 fournissent la solution unique.

Le cas où l'on admet que deux ou plusieurs des nombres peuvent être égaux ne mérite pas de nous arrêter, car tous les nombres se décomposent suivant la condition indiquée. La somme des facteurs d'un nombre quelconque étant généralement inférieure à ce nombre, il suffira d'ajouter à cette somme des unités en quantité suffisante. Soit, par exemple, le nombre 10, on aura

$$5.2.1.1.1=5+2+1+1+1=10.$$

Les nombres premiers eux-mêmes se réduisent à cette règle au moyen d'une identité telle que $7=7$, c'est-à-dire en posant $n=1$.

Enfin nous observerons que cette règle fournit encore l'exemple unique des nombres différents

$$3.2.1=3+2+1=6.$$