J. MENTION

Démonstration d'un théorème de M. Steiner

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 65-67
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__65_1>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. STEINER;

(voir page 16);

PAR M. J. MENTION.

IV.

Théorème. — *Le point d'intersection des deux médianes, dans les quadrilatères de bissectrices, est situé sur les trois cercles de neuf points correspondants aux triangles qu'on obtiendra, en prenant les points de rencontre de toutes les bissectrices partant des couples de sommets opposés, respectivement.*

Ainsi je dis que le cercle des neuf points relatif au triangle PQH (*fig.* 1, p. 19) contient le point de concours des médianes. En effet, il est clair que les trois hauteurs de ce triangle passent par le point G, et que les deux médianes rectangulaires aboutissent aux milieux ε, θ de GH et PQ, ces dernières étant séparément diagonales de nos quadrilatères GG'... HH'..., PQ.... Or le cercle des neuf points a pour diamètre la droite $\varepsilon\theta$; donc le théorème est démontré.

Corollaire. — Le cercle des neuf points passe évidemment par les sommets A, C; la diagonale AC sera vue, par conséquent, du point commun aux deux médianes sous le même angle que du milieu de GH, c'est-à-dire sous un angle égal à deux fois AHC, parce que A, C, G, H appartiennent à un même cercle. Mais

$$AHC = 2\pi - D - \pi - \frac{A+C}{2} = \frac{B-D}{2}.$$

La diagonale BD sera vue du même point sous un angle égal à A — C, la diagonale EF sous un angle égal à A + C. On reconnaîtra bien aisément que, du point de concours des cercles circonscrits aux triangles du quadrilatère proposé, on voit les diagonales AC, BD, EF sous les angles B — D, A — C, A + C.

Ainsi nous avons entièrement prouvé le théorème de M. Steiner, et par des considérations sans doute très-différentes de celles qui l'ont fait découvrir. Nous serions curieux de savoir comment y a été conduit l'auteur, si habile dans l'art d'initier aux beautés géométriques.

V.

Cas particuliers.

Je n'ai pu entreprendre de dessiner complétement la figure, sujet de toutes ces propriétés. Ce serait une véritable épure, et fort délicate. J'examinerai encore les deux cas où le quadrilatère est circonscriptible et inscriptible au cercle, pour lesquels des figures spéciales ne sont point indispensables.

Ier Cas. — Un des cercles de la première série devient infiniment petit; il se confond avec un des triangles du premier quadrilatère de bissectrices. Autrement, les points de rencontre des bissectrices opposées du premier système se réduisent à quatre, et le centre du cercle est l'un des *points-limites* de la série orthogonale; l'autre point-limite est la projection du centre sur la droite unissant les points de rencontre externes.

IIe Cas. — Les bissectrices issues des sommets E, F forment un rectangle, et le second quadrilatère des bissectrices est aussi un rectangle, inscrit au même cercle que le quadrilatère donné; ce qu'on vérifierait du reste immédiatement. Donc ce cercle fait partie du second groupe, et le cercle décrit sur GH ou EF comme diamètre appartient au premier. Enfin le point de concours des deux lignes centrales est précisément au pied de la perpendiculaire abaissée du centre du cercle proposé sur EF. Car ce centre se trouve sur les cercles des neuf points répondant aux triangles PQH, P′Q′H′, lesquels passent aussi respectivement par les sommets A, C; B, D: d'où l'on conclurait que leur corde commune est perpendiculaire sur la droite EF, et équidistante du centre et de cette dernière, qui sera la ligne centrale du premier groupe.

De nos observations se dégagent les deux théorèmes suivants sur le quadrilatère inscrit :

1° Le point de concours des cercles circonscrits aux triangles d'un quadrilatère inscrit au cercle est la projection du centre de celui-ci sur la troisième diagonale.

2° Le cercle décrit sur la troisième diagonale comme diamètre coupe à angle droit le cercle circonscrit au quadrilatère.