Nouvelles annales de mathématiques

Faure

Solution de la question 294

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 62-63

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__62_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 294

(voir t. XIII, p. 315);

PAR M. FAURE.

Soient P_1, $P_2, \ldots, P_n$, n points matériels de mêmes masses; G_2 le centre de gravité de P_1, P_2; G_3 le centre de gravité de P_3 et de la masse $P_1 + P_2$ posée en G_2; G_4 le centre de gravité de P_4 et G_3, et ainsi de suite, de sorte que G_n est le centre de gravité de P_n et de G_{n-1}. G_n est indépendant de la manière dont on prend les masses. Désignons par $A_{(i)}$ la distance de G_{i-1} à P_i; la quantité

$$\frac{1}{2}(A_2)^2 + \frac{2}{3}(A_3)^2 + \frac{3}{4}(A_4) + \ldots + \frac{n-1}{n}(A_n)^2$$

est constante dans quelque ordre qu'on prenne les masses. (STEINER.)

Lemme.— Soient A, B, C trois points en ligne droite, G un point quelconque; on a la relation

$$GA^2.BC + CB^2.AC = AB.AC.BC + GC^2.AB.$$

Si aux points A et B sont appliquées les masses respectives α, β, et que C soit leur centre de gravité, l'égalité précédente devient

$$\alpha . GA^2 + \beta . GB^2 = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} AB^2 + (\alpha + \beta) GC^2.$$

Démonstration. — Ceci admis, au lieu de supposer, comme dans le théorème de M. Steiner, que les points P aient des masses égales, je suppose qu'ils ont des masses inégales respectivement représentées par p_1, p_2,..., p_n. Soit alors

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k = S_k,$$

et G un point pris arbitrairement; joignant ce point à tous les points P ainsi qu'aux points G_2, G_3,..., G_n, les triangles GP_1P_2, GG_2P_3,..., $GG_{n-1}P_n$ donnent

$$p_1 GP_1^2 + p_2 GP_2^2 = \frac{p_1 p_2}{s_2} P_1P_2^2 + S_2 GG_2^2,$$

$$S_2 GG_2^2 + p_3 GP_3^2 = \frac{s_2 p_3}{s_3} G_2P_3^2 + S_3 GG_3^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_{n-1} GG_{n-1} + p_n GP_n^2 = \frac{s_{n-1} p_n}{s_n} G_{n-1}P_n^2 + S_n GG_n^2.$$

Si l'on vient à supposer que le point G coïncide avec G_n, centre de gravité de notre système de points, le terme GG_n est nul, de sorte qu'en ajoutant les égalités précédentes, on trouve

$$\frac{p_1 p_2}{s_2} P_1P_2^2 + \frac{s_2 p_3}{s_3} G_2P_3^2 + \ldots + \frac{s_{n-1} p_n}{s_n} G_{n-1}P_n$$
$$= p_1 G_nP_1^2 + p_2 G_nP_2^2 + \ldots + p_n G_nP_n^2.$$

Le second membre est constant, le premier le sera aussi.

Si les masses sont égales, on a le résultat de M. Steiner. Ce théorème donne des corollaires intéressants que l'équation indique d'elle-même.