NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

COLOT

Solution de la question 603

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 55-57

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__55_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SOLUTION DE LA QUESTION 603

(voir t XX, p. 399),

PAR M. COLOT,
Professeur.

Si l'on désigne par $E(a, b)$ la circonférence d'une ellipse dont les axes sont $2a$, $2b$ et si l'on pose

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

on a

$$E(a, b) = E\left(\frac{a+c}{2a+b}a, \frac{a-c}{2a+b}a\right) + E\left(\frac{a+b}{2a+b}b, \frac{2\sqrt{ab}}{2a+b}b\right).$$

(PROUHET.)

(*) Ce Mémoire et celui de M. Quet sont, à ce que je sache, ce que nous avons de plus satisfaisant sur les mouvements relatifs, les seuls qui existent dans la nature. TM.

Nous représenterons par $E\left(\frac{c}{a}\right)$ la fonction elliptique complète de seconde espèce qui a pour module $\frac{c}{a}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}\sin^2\varphi}.$$

Lemme I. — La circonférence d'une ellipse $E(a, b)$ est égale $2aE$ à $\left(\frac{c}{a}\right)$. (*Voir* tous les Traités de Calcul intégral.)

Lemme II. — Soient λ, λ_1, λ_2 trois quantités liées entre elles par les relations

$$\lambda_1 = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}, \quad \lambda_2 = \frac{2\sqrt{\lambda_1}}{1+\lambda_1}$$

et μ, μ_1, μ_2 trois autres quantités telles, que l'on ait

$$\mu^2 + \lambda^2 = 1, \quad \mu_1^2 + \lambda_1^2 = 1, \quad \mu_2^2 + \lambda_2^2 = 1;$$

on peut poser

$$\text{(A)} \quad \mu_1(1+\mu_1)E(\lambda) - (2+\mu_1)E(\lambda_1) + (1+\lambda_1)E(\lambda_2) = 0$$

(Verhulst, *Fonctions elliptiques*, p. 162).

Théorème. — *Les trois ellipses ont pour excentricités* $\frac{c}{a}$, $\frac{2\sqrt{ac}}{a+c}$, $\frac{a-b}{a+b}$. *L'égalité à démontrer revient donc à la suivante*

$$\text{(B)} \quad E\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{a+c}{2a+b}E\left(\frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\right) + \frac{b}{a}\cdot\frac{a+b}{2a+b}E\left(\frac{a-b}{a+b}\right).$$

Posons

$$\text{(C)} \qquad \frac{a-b}{a+b} = \lambda, \quad \frac{c}{a} = \lambda_1, \quad \frac{2\sqrt{ac}}{a+c} = \lambda_2.$$

on vérifiera sans peine que

$$\lambda_1 = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}, \quad \lambda_2 = \frac{2\sqrt{\lambda_1}}{1+\lambda_1},$$

et que la substitution dans l'égalité (B) des valeurs de a, b, c tirées des équations (C), la rendra identique à (A).