J. de Virieu

Sur une identité de Waring

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 45-48
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__45_1>

SUR UNE IDENTITÉ DE WARING;

PAR M. J. DE VIRIEU,
Professeur à Lyon.

1. A la page 583 du tome IV des *Nouvelles Annales*, on trouve ce qui suit :

« Soient n quantités quelconques, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on a toujours cette identité :

$$\begin{aligned}
&a_1 a_2 (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2) a_3 (a_1 + a_2 + a_3) + \ldots \\
&\quad + (a_1 + \ldots + a_{n-1}) a_n (a_1 + \ldots + a_n) \\
&= a_n a_{n-1} (a_n + a_{n-1}) + (a_n + a_{n-1}) a_{n-2} (a_n + a_{n-1} + a_{n-2}) + \ldots \\
&\quad + (a_n + \ldots + a_2) a_1 (a_n + \ldots + a_2).
\end{aligned}$$

» Waring déduit cette identité d'une propriété de la » parabole; il serait intéressant de l'établir analytique- » ment. »

2. Il suffit de démontrer que le premier membre de

l'identité proposée est une fonction symétrique des quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$; car le second membre se déduit du premier en remplaçant chacune des quantités de la première des deux lignes ci-dessous,

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_i, \ldots,\ a_{n-1},\ a_n,$$
$$a_n,\ a_{n-1}, \ldots,\ a_{n-1+i}, \ldots,\ a_2,\ a_1,$$

par la quantité de même rang dans la deuxième ligne.

3. Soit P_n le premier membre de l'identité proposée; n est un entier absolu au moins égal à 2, et l'on a par définition

$$P_n = \sum_{n=1}^{n=n-1} [(a_1 + \ldots + a_n) a_{n+1} (a_1 + \ldots + a_{n+1})],$$

d'où

$$\text{(A)} \quad P_{n+1} = P_n + (a_1 + \ldots + a_n) a_{n+1} (a_1 + \ldots + a_{n+1}).$$

4. Développons quelques valeurs particulières de P_n.

$$P_2 = a_1 a_2 (a_1 + a_2),$$

$$\begin{aligned} P_3 &= P_2 + (a_1 + a_2) a_3 (a_1 + a_2 + a_3) \\ &= [(a_1 + a_2 + a_3) a_1 a_2 - a_1 a_2 a_3] + [(a_1 + a_2 + a_3)(a_1 a_3 + a_2 a_3)] \\ &= [a_1 + a_2 + a_3 (a_1 a_2) + a_1 a_3 + a_2 a_3] - a_1 a_2 a_3, \end{aligned}$$

$$P_4 = P_3 + (a_1 + a_2 + a_3) a_4 (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

$$= \left\{ \begin{aligned} &+ [(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) \\ &\qquad\qquad - a_4 (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) - a_1 a_2 a_3] \\ &+ [(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_4 a_1 + a_4 a_2 + a_4 a_3)] \end{aligned} \right.$$

$$= \left\{ \begin{aligned} &+ (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_4 a_1 + a_4 a_2 + a_4 a_3) \\ &- (a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 a_3). \end{aligned} \right.$$

5. Désignons par ${}_pS_q$ la somme des produits différents

de q facteurs qu'on peut former avec les p quantités distinctes $a_1, a_2, \ldots, a_p$; ${}_pS_q$ sera une fonction symétrique de ces quantités, et les formules du n° 4 deviennent

$$P_2 = {}_2S_1 \times {}_2S_2,$$
$$P_3 = {}_3S_1 \times {}_3S_2 - {}_3S_3,$$
$$P_4 = {}_4S_1 \times {}_4S_2 - {}_4S_3,$$

d'où par induction :

(B) $$P_n = {}_nS_1 + {}_nS_2 - {}_nS_3,$$

formule qu'il faut vérifier.

6. Supposons cette formule exacte pour une valeur particulière ν de n, on aura

$$P_\nu = {}_\nu S_1 \times {}_\nu S_2 - {}_\nu S_3,$$

et en vertu de la formule (A)

$$P_{\nu+1} = P_\nu + (a_1 + \ldots + a_\nu) a_{\nu+1} (a_1 + \ldots + a_{\nu+1}),$$

ou

$$P_{\nu+1} = {}_\nu S_1 \times {}_\nu S_2 - {}_\nu S_3 + (a_1 + \ldots a_\nu) a_{\nu+1} (a_1 + \ldots + a_{\nu+1}),$$
$$P_{\nu+1} = ({}_{\nu+1}S_1 - a_{\nu+1})\, {}_\nu S_2 - {}_\nu S_3 + {}_{\nu+1}S_1 \times a_{\nu+1} \times (a + \ldots + a_\nu),$$
$$P_{\nu+1} = {}_{\nu+1}S_1 \left({}_\nu S_2 + a_{\nu+1}(a_1 + \ldots + a_\nu)\right) - ({}_\nu S_3 + a_{\nu+1}\, {}_\nu S_2);$$

mais

$${}_\nu S_2 + a_{\nu+1}(a_1 + \ldots + a_\nu) = {}_{\nu+1}S_2,$$
$${}_\nu S_3 + a_{\nu+1}\, {}_\nu S_2 = {}_{\nu+1}S_3$$

donc

$$P_{\nu+1} = {}_{\nu+1}S_1 \times {}_{\nu+1}S_2 - {}_{\nu+1}S_3.$$

7. Si donc la formule (B) est vraie pour une valeur particulière de n, elle est vraie pour la valeur de n immédiatement supérieure à celle-là ; or, en vertu du n° 5, elle est vraie pour $n = 2.3.4$; donc elle est générale; la fonction P_n, mise sous cette forme, est évidemment une fonc-

tion symétrique des quantités $a_1, \ldots, a_n$, ce qui démontre l'identité proposée.