NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ABRAHAM SCHNÉE

Question 623

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 379-380

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__379_1>

QUESTION 623;

SOLUTION DE M. ABRAHAM SCHNÉE,
Elève du lycée Charlemagne.

Discussion de l'équation (6) *de la page* 320.

$$(1)\left\{\begin{aligned} &m^2k^2(m^2-1)x^2-k^2(m-1)y^2+m^2(a^2+b^2+c^2-k^2)z^2\\ &\qquad+2kmayz+2km^3bxz+2k^2m^2ax\\ &\qquad+2k^2m^2by-m^2(a^2+b^2+c^2-k^2)k^2=0.\end{aligned}\right.$$

Premier cas : $m^2-1 \gtrless 0$. — Ce cas suppose les deux directrices non rectangulaires. En multipliant l'équation (1) par (m^2-1), on obtient :

$$\left.\begin{aligned} &m^2k^2(m^2-1)^2x^2+2km^2(m^2-1)(mbz+ka)x\\ &-k^2(m^2-1)^2y^2+2km(m^2-1)(az+kmb)y\\ &+m^2(m^2-1)(a^2+b^2+c^2-k^2)z^2\\ &-m^2(m^2-1)(a^2+b^2+c^2-k^2)k^2\end{aligned}\right\}=0,$$

ou

$$\left.\begin{aligned} &m^2[k(m^2-1)x+mbz+ak]^2\\ &-[k(m^2-1)y-maz-km^2a]^2\\ &+m^2[m^2(a^2-c^2-k^2)-(b^2+c^2-k^2)]z^2\\ &-m^2k^2[m^2(a^2+c^2-k^2)-(b^2+c^2-k^2)]\end{aligned}\right\}=0.$$

Si $m = 0$, on a $y = 0$; si $k = 0$, on a $z = 0$; c'est ce qu'on savait déjà d'après le mode de génération de la surface. Enfin, si l'on suppose à la fois $m = 0, k = 0$, il n'y a plus de surface. Nous supposerons donc m et k différents de zéro.

Si l'on a

$$m^2(a^2 + c^2 - k^2) - (b^2 + c^2 - k^2) = 0,$$

la surface se réduit aux deux plans

$$\begin{gathered} m[k(m^2 - 1)x + mbz + ak] \\ = \pm[k(m^2 - 1)y - maz - km^2 b]. \end{gathered}$$

Lorsqu'on a

$$m^2(a^2 + c^2 - k^2) - (b^2 + c^2 - k^2) \gtrless 0,$$

la surface est un hyperboloïde à une nappe. Les trois plans

$$\begin{gathered} k(m^2 - 1)x + mbz + ak = 0, \\ k(m^2 - 1)y - maz - km^2 b = 0, \\ z = 0, \end{gathered}$$

sont trois plans diamétraux conjugués de la surface; ils se coupent au point $x = \dfrac{-a}{m^2 - 1}$, $y = \dfrac{m^2 b}{m^2 - 1}$, $z = 0$, qui en est le centre.

Note. — En discutant de même le second cas où $m^2 - 1 = 0$, M. Schnée a trouvé que, dans cette hypothèse, l'équation (1) représente un paraboloïde hyperbolique ou différents systèmes de deux plans.