NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. SIACCI

Question 616

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 328-330

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__328_0>

QUESTION 616

(voir p. 156).

Soit construit un triangle MNO, *le sommet* N *est fixe ainsi que les directions des côtés* NM *et* NO, *le côté* MO *a une longueur constante; par conséquent il touchera une certaine courbe : le point de contact sur chaque tangente* MO *est aussi éloigné de* M *que la projection orthogonale de* N *est éloignée de* O; *cette courbe nommée hypocycloïde, est fermée et composée de quatre branches correspondant aux quatre angles des directions données* NM, NO. (BÖKLEN.)

SOLUTION DE M. F. SIACCI,
Officier d'artillerie (à Turin).

Soit P le point de la courbe correspondant à la tangente MO, et soient x, y ses coordonnées rapportées aux axes NO, NM. On aura

$$\mathrm{PM} = \frac{x \sin \mathrm{N}}{\sin(\alpha - \mathrm{N})}, \quad \mathrm{PO} = \frac{y \sin \mathrm{N}}{\sin \alpha},$$

et par conséquent

$$(1) \qquad \frac{x \sin \mathrm{N}}{\sin(\alpha - \mathrm{N})} + \frac{y \sin \mathrm{N}}{\sin \alpha} = a,$$

a étant la longueur constante MO, et α l'angle que cette droite fait avec l'axe des x. Cette équation représente la droite MO dans une de ses positions. Si on la différentie par rapport à α, on aura une autre équation dans laquelle, ainsi que dans la précédente, x, y sont les coordonnées du point P de la courbe.

Or, de l'équation (1), on déduit l'équation

$$y = \frac{a \sin\alpha}{\sin N} - \frac{x \sin\alpha}{\sin(\alpha - N)},$$

laquelle, différentiée par rapport à α et divisée par $d\alpha$, donne

$$\frac{x \sin N}{\sin^2(\alpha - N)} = - \frac{a \cos\alpha}{\sin N};$$

d'où

$$\frac{x \sin N}{\sin(\alpha - N)} = - \frac{a \sin(\alpha - N)}{\sin N} \cdot \cos\alpha,$$

équation qui démontre le théorème, ayant trouvé $\mathrm{MP} = \frac{x \sin N}{\sin(\alpha - N)}$, et la projection de ON sur OM étant égale à $- \frac{a \sin(\alpha - N)}{\sin N} \cdot \cos\alpha$.

Il résulte évidemment de cette propriété : 1° que la courbe est symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle N; 2° qu'elle rencontre les axes en quatre points également éloignés de l'origine; 3° que ces points sont des points d'inflexion.

Lorsque $N = 90°$, il devient très-facile d'avoir l'équation de la courbe. En effet, l'équation (1) devient alors

$$- \frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha} = a,$$

qui, différentiée par rapport à α, donne

$$- \frac{x \sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{y \cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0,$$

d'où

$$\tang\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = - \frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}},$$

$$\sin\alpha = \frac{y^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos\alpha = \frac{-x^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

et par conséquent

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

équation d'une hypocycloïde.