ABRAHAM SCHNÉE

Solution de la question 623 (Bobillier)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 318-320

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__318_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 623 (BOBILLIER);

PAR M. ABRAHAM SCHNÉE,
Elève du lycée Charlemagne.

Une droite glisse sur deux autres non situées dans un même plan, de telle sorte que la partie interceptée entre

(*) D'après la similitude des triangles FcC, MmF.

(**) Parce que les triangles TCt, MmF sont semblables et qu'en outre $TC = \frac{b^2}{y'}$.

(*Notes du Rédacteur.*)

elles soit constamment vue sous un angle droit d'un certain point de l'espace; cette droite engendre une surface gauche du second ordre.

Je prends pour axe des z la plus courte distance des deux droites, et pour plan des xy un plan perpendiculaire à cette plus courte distance en son milieu. Les axes des x et des y sont les bissectrices des angles formés par les projections des deux droites sur le plan des xy.

Cela posé, leurs équations seront

$$(1) \qquad z = k, \qquad y = -mx,$$

$$(2) \qquad z = -k, \quad y = mx.$$

Menons un plan par la première,

$$(3) \qquad z - k + \lambda(y + mx) = 0.$$

Menons de même un plan par la seconde,

$$(4) \qquad z + k + \lambda'(y - mx) = 0.$$

L'intersection de ces deux plans représente une droite qui s'appuie à la fois sur les deux autres.

Cherchons les coordonnées des points de rencontre, il suffit de résoudre simultanément les équations (1), (3) et (4), puis (2), (3) et (4). On trouve ainsi pour le premier

$$x = \frac{k}{\lambda' m}, \quad y = -\frac{k}{\lambda'}, \quad z = k,$$

pour le second

$$x = \frac{k}{\lambda m}, \quad y = \frac{k}{\lambda}, \quad z = -k.$$

Soient a, b, c les coordonnées du point donné de l'espace; en écrivant que le carré du premier côté du triangle formé par ce point et les deux points précédents est égal à la somme des carrés des deux autres, j'exprimerai que la partie interceptée est constamment vue sous un angle droit; on aura donc la relation

$$(5)\left\{\begin{aligned} &\frac{k^2}{m^2}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)^2+k^2\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}\right)^2+4k^2 \\ &=\left(a-\frac{k}{\lambda' m}\right)^2+\left(b+\frac{k}{\lambda'}\right)^2+(c-k)^2+\left(a-\frac{k}{\lambda m}\right)^2 \\ &\quad+\left(b-\frac{k}{\lambda}\right)^2+(c+k)^2. \end{aligned}\right.$$

Eliminons λ et λ' entre les équations (3), (4) et (5), nous aurons l'équation de la surface. On trouve, après réductions,

$$(6)\left\{\begin{aligned} &m^2k^2(m^2-1)x^2-k^2(m^2-1)y^2 \\ &+m^2(a^2+b^2+c^2-k^2)z^2+2k\,mayz+2km^3\,bzx \\ &+2k^2m^2ax+2k^2m^2by-m^2(a^2+b^2+c^2-k^2)k^2=0\ (^*). \end{aligned}\right.$$

C'est une surface du second ordre, et elle est gauche, puisqu'elle est engendrée par une droite s'appuyant sur deux autres qui ne se rencontrent pas.

(*) Cette équation représente, dans le cas le plus général, un hyperboloïde à une nappe dont le centre a pour coordonnées

$$x=\frac{-a}{m^2-1},\quad y=\frac{m^2b}{m^2-1},\quad z=0.$$

Dans les cas particuliers, elle représente un paraboloïde hyperbolique, le système de deux plans, etc. Nous engageons M. Schnée à discuter l'équation qu'il a obtenue. (*Note du Rédacteur.*)