L. CREMONA

Mémoire de géométrie pure sur les cubiques gauches

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 287-304

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__287_0>

MÉMOIRE DE GÉOMÉTRIE PURE SUR LES CUBIQUES GAUCHES;

PAR M. L. CREMONA,
Professeur à l'Université de Bologne.

Parmi les courbes géométriques à double courbure, la plus simple est la courbe du troisième ordre ou *cubique gauche*, qui est l'intersection de deux hyperboloïdes à une nappe ayant une génératrice droite commune. C'est, je crois, M. Möbius qui s'occupa le premier de cette courbe. Dans son ouvrage classique, *Der barycentrische Calcul* (Leipzig, 1827), il donna une représentation analytique, très-simple et très-heureuse, de la cubique gauche, et démontra le théorème fondamental : « Une tangente mobile de cette courbe décrit, sur un plan osculateur fixe, une conique. »

En 1837, M. Chasles, dans la note XXXIII^e de son admirable *Aperçu historique*, énonça plusieurs propriétés de la cubique gauche; les plus essentielles sont :

« 1° Le lieu géométrique des sommets des cônes du second degré, qui passent tous par six points donnés dans l'espace, renferme la cubique gauche déterminée par ces six points.

» 2° Les tangentes aux différents points d'une cubique gauche forment une surface développable du quatrième ordre.

» 3° Une propriété de sept points d'une cubique gauche. »

Le tome X du *Journal de M. Liouville* (1845) contient un Mémoire de M. Cayley, qui est d'une extrême importance; il y donne les relations qui ont lieu entre l'ordre d'une courbe gauche, la classe et l'ordre de sa développable osculatrice, le nombre des points et des plans osculateurs stationnaires, le nombre des droites qui passent par un point donné et s'appuient deux fois sur la courbe, etc. Ensuite, l'illustre auteur fait l'application de ses formules à la courbe gauche du troisième ordre, et trouve que :

« 1° La développable osculatrice d'une telle courbe est du quatrième ordre et de la troisième classe.

» 2° Par un point quelconque de l'espace on peut mener *une* droite qui s'appuie deux fois sur la courbe, et un plan quelconque contient *une* droite qui est l'intersection de deux plans osculateurs. »

M. Seydewitz, dans un Mémoire très-intéressant qui fait partie de l'*Archiv der Mathematik and Physik* (*), a trouvé et démontré, par la pure géométrie, que la cubique gauche est le lieu du point de rencontre de deux droites homologues, dans deux faisceaux homographiques de rayons, dans l'espace. Il en a déduit la construction de la courbe par points, des tangentes et des plans osculateurs, et cette autre propriété, déjà donnée par M. Chasles, que chaque point de la cubique gauche est le sommet d'un cône du second degré passant par la courbe.

L'auteur appelle la courbe gauche du troisième ordre, *conique gauche* (*raumlicher Kegelschnitt*); et, en classant ces courbes selon leurs asymptotes, il propose les noms, que j'ai adoptés, d'*hyperbole gauche* pour la cubique qui a trois asymptotes réelles et distinctes; d'*ellipse gauche* pour la cubique qui a une seule asymptote réelle, les deux autres étant imaginaires; d'*hyperbole parabolique gauche* pour la cubique qui a une asymptote réelle, et les deux autres coïncidentes à l'infini; enfin, de *para-*

(*) X^er Theil, 2^e Heft; Greifswald, 1847.

bole gauche pour la cubique qui a un plan osculateur à l'infini.

Dans un beau Mémoire de M. Salmon, *On the classification of curves of double curvature* (*), que je connais seulement depuis peu, on lit que : « Une cubique gauche tracée sur une surface (réglée) du second ordre rencontre en deux points toutes les génératrices d'un même système de génération, et en un seul point toutes les génératrices du deuxième système.

Mais il était réservé à l'illustre auteur de la *Géométrie supérieure* de donner la plus puissante impulsion à la doctrine de ces courbes. Dans une communication à l'Académie des Sciences (**), M. Chasles, avec cette merveilleuse fécondité qui lui est propre, énonça (sans démonstration) un grand nombre de propositions qui constituent une vraie théorie des cubiques gauches. On y trouve notamment :

1° La génération de la courbe, au moyen de deux faisceaux homographiques de rayons, dans l'espace, déjà donnée par M. Seydewitz.

2° La génération de la courbe par trois faisceaux homographiques de plans. Ce théorème est d'une extrême importance; on peut en déduire tous les autres, et il forme la base la plus naturelle d'une théorie géométrique des cubiques gauches.

3° Le théorème : « Par un point donné on ne peut mener que trois plans osculateurs à la cubique gauche; les points de contact de ces trois plans avec la courbe sont dans un plan passant par le point donné. » Ce théorème

(*) *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, vol. V. Cambridge, 1850.

(**) *Compte rendu* du 10 août 1857; *voir* aussi le *Journal de M. Liouville*, novembre 1857.

établit la parfaite réciprocité polaire entre la cubique gauche et sa développable osculatrice; ainsi, ces courbes sont destinées à jouer, dans l'espace, le même rôle que les lignes du second ordre dans le plan.

4° Le théorème de M. Möbius, et un théorème plus général sur la nature d'une section plane quelconque de la développable osculatrice de la cubique gauche.

5° Les belles propriétés des hyperboloïdes passant par la courbe, etc.

Dans un Mémoire inséré au tome Ier des *Annali di Matematica pura ed applicata* (Roma, 1858), j'ai démontré, par l'analyse (*), les théorèmes les plus importants du travail cité de M. Chasles, et, outre cela, j'ai donné quelques propositions nouvelles, notamment celle qui constitue la base de la théorie des *plans conjoints* que j'ai développée peu après (**).

Alors parut, dans le *Journal mathématique de Berlin*, un Mémoire de M. Schröter. L'auteur y démontre, par la géométrie pure et avec beaucoup d'habileté, les théorèmes fondamentaux de MM. Möbius, Seydewitz et Chasles; surtout il met en évidence l'identité des courbes gauches du troisième ordre et de la troisième classe. M. Schröter fait observer que quatre points de la cubique gauche et les quatre plans osculateurs correspondants forment deux tétraèdres, dont chacun est, en même temps, inscrit et circonscrit à l'autre; ce qui se rattache à une question ancienne posée par M. Möbius (***).

(*) Je me suis servi d'une représentation analytique de la courbe qui revient au fond à celle de M. Möbius. Mais je ne connaissais pas alors l'ouvrage capital (si peu connu en Italie) de l'éminent géomètre allemand, ni le Mémoire de M. Seydewitz non plus. Ce sont les citations de M. Schröter qui me firent chercher le *Barycentrische Calcul* et l'*Archiv* de M. Grunert. A présent je restitue *unicuique suum*.

(**) *Annali di Matematica*, t. II. Roma, gennajo-febbrajo 1859, § 11.

(***) *Journal fur die reine und ang. Mathematik*, 3r Band, p. 273.

Quiconque veut aborder l'étude *géométrique* des cubiques gauches doit lire l'important travail de M. Schröter (*).

Ensuite, dans une courte Note, insérée au tome II des *Annali di Matematica* (luglio-agosto 1859), et dans un Mémoire qui fait partie du tome LVIII du *Journal mathématique de Berlin* (publié par M. Borchardt, en continuation du *Journal de Crelle*), j'ai donné d'autres théorèmes sur les mêmes courbes, et particulièrement j'ai étudié la distribution des coniques inscrites dans une surface développable de la troisième classe.

Le Mémoire actuel contient aussi quelques propositions nouvelles; cependant mon but essentiel est de démontrer *géométriquement* les propriétés que j'ai déjà énoncées, avec des démonstrations analytiques ou sans démonstrations, dans mes écrits précédents, et qui se rapportent à la théorie des *plans conjoints* et des *coniques inscrites* dans la développable osculatrice de la cubique gauche.

Je supposerai que le lecteur connaisse les Mémoires, cités ci-dessus, de MM. Chasles et Schröter.

Points conjoints, plans conjoints et droites associées.

1. Si l'on coupe une cubique gauche par un plan arbitraire P, les trois points d'intersection a, b, c forment un triangle inscrit à toutes les coniques, suivant lesquelles le plan P coupe les cônes du second degré qui passent par (*perspectifs à*) la cubique. Deux quelconques de ces cônes ont une génératrice commune qui perce le plan donné en un point d, de manière que les coniques, bases des deux cônes sur P, sont circonscrites au tétragone $abcd$. On voit sans peine que la conique, base d'un troisième

(*) *Journal für die reine und ang. Mathematik*, 56r Band, p. 27.

cône quelconque, perspectif à la courbe gauche, ne passe pas par d, mais par a, b, c seulement.

2. Je conçois maintenant un point o dans l'espace, et la droite qui passe par o et s'appuie en deux points (réels ou imaginaires) a et b sur la cubique gauche. Menons par cette droite un plan quelconque P; ce plan rencontrera la cubique en un troisième point c, et un cône quelconque S perspectif à la cubique, suivant une conique K circonscrite au triangle abc. La trace sur P du plan polaire de o, par rapport au cône S, est la droite polaire de o par rapport à K; donc cette trace passe par o', pourvu que o, o' soient conjugués harmoniquement avec a, b. Le point o' est indépendant du cône S; donc les plans polaires de o, par rapport aux cônes perspectifs à la cubique, passent tous par o'. Cherchons à connaître la *classe* de la surface conique enveloppée par ces plans.

Soit d la deuxième intersection de la conique K par la droite oc; le tétragone $abcd$ est évidemment inscrit aussi à la conique K', base du cône S' (du second ordre, perspectif à la cubique), dont le sommet est sur la droite qui joint d au sommet de S. Donc le point o a la même polaire $o'ef$, par rapport aux coniques K, K'. Cette droite ne peut pas être la polaire de o par rapport à la conique, base d'un troisième cône, car il n'y a pas d'autre conique (perspective à la cubique gauche) passant par a, b, c, d. Par conséquent, $o'ef$, c'est-à-dire une droite quelconque menée par o', est l'intersection des plans polaires de o par rapport à *deux* cônes seulement; nous avons ainsi le théorème :

Les plans polaires d'un point donné o, par rapport à tous les cônes de second degré, perspectifs à une cubique gauche, enveloppent un autre cône du second degré, dont le sommet o' est situé sur la droite qui passe par o

et s'appuie sur la cubique en deux points (réels ou imaginaires) a et b.

Les points o, o' sont conjugués harmoniquement avec les points a, b.

Il suit de la dernière partie du théorème, que :

Les plans polaires du point o', par rapport aux mêmes cônes perspectifs à la cubique, enveloppent un autre cône du second degré, dont le sommet est le point o (*).

J'ai nommé *points conjoints*, deux points tels que *o*, *o'*, et *cônes conjoints* les cônes dont *o*, *o'* sont les sommets. Donc :

La droite qui joint deux points conjoints o, o' est toujours une corde (réelle ou idéale) de la cubique gauche. Et le segment oo' est divisé harmoniquement par la courbe.

Chaque point de la droite *oo'* aura son conjoint sur cette même droite ; donc :

Toute corde de la cubique gauche est l'axe d'une involution de points (conjoints par couples), dont les points doubles sont sur la cubique (**).

3. On sait, d'après M. Chasles (***), que la cubique gauche donne lieu à un genre intéressant de dualité. Tout point *o*, donné dans l'espace, est l'intersection de trois plans osculateurs de la courbe ; et les trois points de contact sont dans un plan O passant par le point donné.

Réciproquement, tout plan O rencontre la cubique gauche en trois points ; et les plans osculateurs en ces points passent par un point *o* du plan donné.

Ainsi, à chaque point *o* correspond un plan O, et *vice*

(*) *Annali di Matematica*, t. II, § 11. Roma, gennajo-febbrajo 1859.
(**) *Annali, etc., ut supra*, § 5, 6, 7.
(***) *Compte rendu* du 10 août 1857, § 40, 41 et 48.

versâ. J'ai nommé le point *o* *foyer* de son plan focal O. Un plan passe toujours par son foyer.

Si le foyer parcourt une droite, le plan focal tourne autour d'une autre droite, et si le foyer parcourt la deuxième droite, le plan passe toujours par la première. On nomme ces droites *réciproques.*

De plus, j'appelle *focale* d'un point *o* la corde de la cubique gauche qui passe par *o*; et *directrice* d'un plan O la droite qui existe dans ce plan et qui est l'intersection de deux plans osculateurs, réels ou imaginaires. La directrice d'un plan et la focale du foyer de ce plan sont deux droites réciproques (*).

En conséquence de cette dualité, les théorèmes démontrés ci-dessus donnent les suivants :

Les pôles d'un plan donné O, *par rapport à toutes les coniques inscrites dans la développable* (*de la troisième classe et du quatrième ordre*) *osculatrice d'une cubique gauche, sont sur une autre conique. Le plan* O′ *de cette conique rencontre le plan* O *suivant une droite, qui est l'intersection de deux plans osculateurs* (*réels ou non*) *de la cubique.*

Ces deux plans osculateurs divisent harmoniquement l'angle des plans O, O′.

Et les pôles du plan O′, *par rapport aux mêmes coniques inscrites, sont sur une autre conique située dans le plan* O (**).

J'ai nommé ces plans *conjoints*, et je dis *conjointes* aussi les coniques locales situées dans ces plans.

Deux plans conjoints s'entrecoupent toujours suivant une droite qui est l'intersection de deux plans oscula-

---

(*) *Annali, etc., ut supra,* § 2, 3, 7, 8.

(**) *Annali di Matematica,* t. I, § 27, settembre-ottobre 1858; t. II, § 5, 7, gennajo-febbrajo 1859.

teurs (réels ou non) de la cubique gauche. Les plans conjoints et les plans osculateurs forment un faisceau harmonique.

Toute droite qui est l'intersection de deux plans osculateurs de la cubique gauche est l'axe d'une infinité de couples de plans conjoints en involution. Les plans doubles de cette involution sont les deux plans osculateurs (*).

On peut démontrer directement ces théorèmes avec la même facilité que les propriétés relatives aux points conjoints (2).

Si une droite s'appuie sur la cubique gauche en deux points, sa réciproque est l'intersection des plans osculateurs en ces points; donc :

Deux points conjoints sont les foyers de deux plans conjoints, et, réciproquement, deux plans conjoints sont les plans focaux de deux points conjoints.

Toute droite qui s'appuie sur la cubique gauche en deux points contient les foyers d'une infinité de couples de plans conjoints, qui passent tous par une même droite. Cette droite est l'intersection des plans osculateurs aux points où la courbe est rencontrée par la droite donnée.

Par une droite qui est l'intersection de deux plans osculateurs de la cubique gauche, passent les plans focaux d'une infinité de couples de points conjoints situés sur la droite qui joint les points de contact de deux plans osculateurs (**).

Si, au lieu de l'intersection de deux plans osculateurs distincts, on prend une tangente de la cubique gauche, tout plan (tangent) mené par cette droite a pour conjoint

---

(*) *Annali di Matematica*, t. II, § 7, gennajo-febbrajo 1859.

(**) *Annali di Matematica*, t. II, § 11, 6, gennajo-febbrajo 1859.

le plan osculateur qui passe par la même tangente. Et le lieu des pôles du plan tangent, par rapport aux coniques inscrites dans la développable osculatrice, est une conique qui a un double contact avec la conique *inscrite* située dans le plan osculateur (conjoint au plan tangent).

De même, tout point donné sur une tangente de la cubique gauche a pour conjoint le point de contact, et l'enveloppe des plans polaires du point donné, par rapport aux cônes du second degré perspectifs à la cubique, est un autre cône du second degré qui est doublement tangent au cône perspectif dont le sommet est le point de contact de la droite tangente avec la courbe gauche.

4. Un point quelconque o, donné dans l'espace, est le sommet d'un cône du troisième ordre et de la quatrième classe, qui passe par la cubique gauche. La droite *focale* de o est la génératrice double du cône; les plans osculateurs menés par o sont ses plans stationnaires. Les génératrices de contact de ces plans, c'est-à-dire les génératrices d'inflexion, sont dans un même plan, qui est le plan *focal* de o (*).

Or, par un théorème connu sur les courbes planes (**), ce plan focal est le plan polaire de la génératrice double, par rapport au trièdre formé par les plans stationnaires; donc :

La focale d'un point donné, par rapport à une cubique gauche, est la polaire du plan focal de ce point, par rapport au trièdre formé par les plans osculateurs de la cubique, menés du point donné.

D'où, par le principe de dualité, on conclut que :

La directrice d'un plan donné, par rapport à une cu-

(*) *Compte rendu* du 10 août 1857, § 17, 18. — *Annali di Matematica*, t. I, § 6, maggio-giugno, 1858.

(**) SALMON, *Higher plane curves*, p. 171. Dublin, 1852.

bique gauche, est la polaire du foyer de ce plan, par rapport au triangle formé par les points où la cubique est rencontrée par le plan donné (*).

Soit O un plan donné; o son foyer; a, b, c les points d'intersection de la cubique par ce plan. Les droites ao, bo, co seront les traces, sur O, des plans osculateurs aux points a, b, c. Soient λ, μ, ν les points où ao, bo, co rencontrent bc, ca, ab respectivement; α, β, γ les points d'intersection de bc et $\mu\nu$, de ca et $\nu\lambda$, de ab et $\lambda\mu$. Les points α, β, γ seront sur une ligne droite qui est la polaire harmonique de o, par rapport au triangle abc, c'est-à-dire qu'elle est la *directrice* du plan O.

5. Une droite, telle que ao, qui passe par un point de la cubique gauche, et qui est située dans le plan osculateur correspondant, a des propriétés remarquables. Avant tout, elle est réciproque d'elle-même; d'où il suit que tout plan, mené par une telle droite, a son foyer sur la même droite.

Soit A la droite tangente à la cubique en a. La droite ao rencontrera A et une autre tangente A′ de la cubique; soit a' le point de contact. Si l'on veut trouver A′, a', il suffit de concevoir l'hyperboloïde passant par la cubique gauche et par ao. Il est évident que cet hyperboloïde contient A; donc il contiendra une autre tangente (**); c'est A′. Les génératrices de cette surface, dans le système auquel appartient A, s'appuient sur la cubique gauche, chacune en deux points; ces couples de points forment une involution, dont a, a' sont les points doubles (***).

(*) *Annali di Matematica*, t. II, § 3, gennajo-febbrajo 1859.

(**) *Compte rendu, etc., u. s.*, § 23.

(***) *Compte rendu, etc., u. s.*, § 22.—*Annali di Matematica*, t. I, § 3, 18, maggio-giugno, 1858.

Si u, v, w sont trois points donnés de la cubique gauche, l'hyperboloïde, dont il s'agit, est engendré par les faisceaux homographiques A $(u, v, w, \ldots)$, A' $(u, v, w, \ldots)$. Dans ces faisceaux, au plan Aa' (tangent à la cubique en a et sécant en a') correspond le plan A'a' (osculateur en a'); et au plan A'a (tangent en a' et sécant en a) correspond le plan Aa (osculateur en a). Donc, l'hyperboloïde est touché, en a et a', par les plans osculateurs à la cubique; de plus, les génératrices, dans l'autre système, passant par a et a' sont la droite intersection des plans Aa, A'a (c'est-à-dire ao), et la droite intersection des plans A'a', Aa' (que nous désignerons par $a'o'$).

Donc, la droite ao détermine cette autre droite $a'o'$ qui, comme la première, passe par un point a' de la cubique et est située dans le plan osculateur correspondant. La première droite est l'intersection du plan osculateur en a par le plan sécant en a et tangent en a'; la deuxième droite est l'intersection du plan osculateur en a' par le plan sécant en a' et tangent en a. Ces deux droites et les droites tangentes en a, a' à la cubique forment un quadrilatère gauche (dont ao, $a'o'$ sont deux côtés opposés) qui est tout entier sur la surface d'un hyperboloïde passant par la cubique gauche, et qui appartient aussi (par le principe de dualité) à un autre hyperboloïde, inscrit dans la développable osculatrice de la cubique.

Nous pouvons donner à ces droites ao, $a'o'$, dont chacune détermine complétement l'autre, le nom de *droites associées*.

6. Chaque génératrice M de l'hyperboloïde passant par la courbe gauche, dans le système (A, A'), rencontre celle-ci en deux points i, j et les droites ao, $a'o'$ en deux autres points ω, ω'. Or, j'observe que les points de la cubique a, a'; i, j sont conjugués harmoniques, parce

que a, a' sont les éléments doubles d'une involution, dont i, j sont deux éléments conjugués. Donc, si nous concevons une autre génératrice N du même hyperboloïde, dans le système (A, A', M), les plans N (a, a', i, j) formeront un faisceau harmonique. Mais ces plans sont percés par la droite M en ω, ω', i, j; donc la corde ij est divisée harmoniquement par ao, $a'o'$ en ω, ω'. Ainsi nous avons démontré ce théorème :

Si l'on se donne deux droites associées, par rapport à la cubique gauche, chaque point de l'une a son conjoint sur l'autre; c'est-à-dire, *toute corde de la cubique gauche qui rencontre l'une des deux droites associées rencontre aussi l'autre, et est divisée harmoniquement par les mêmes droites* (*).

On en conclut le théorème corrélatif :

Deux droites associées étant données, chaque plan passant par l'une a son conjoint qui passe par l'autre; c'est-à-dire, *toute droite qui est l'intersection de deux plans osculateurs de la cubique gauche et qui rencontre l'une des deux droites associées, rencontre aussi l'autre, et détermine avec ces droites deux plans qui divisent harmoniquement l'angle des plans osculateurs.*

7. Reprenons la construction du n° 4. La droite bc est une corde de la cubique gauche; elle est dans un même plan avec ao, donc elle rencontrera aussi $a'o'$ (associée à ao). Mais $a'o'$ doit être dans le plan O' conjoint au plan donné O; de plus, l'intersection des plans O, O' est la droite $\alpha\beta\gamma$; donc $a'o'$ passe par α. Soient a', b', c' les points où la cubique gauche est rencontrée par le plan O'; o' le foyer de O'; $a'o'$, $b'o'$, $c'o'$ seront les droites associées à ao, bo, co respectivement, c'est-à-dire

(*) *Journal fur die reine und ang. Mathematik*, Band 58, § 14. Berlin, 1860.

les traces, sur O′, des plans osculateurs en a', b', c'. Il suit de ce qui précède, que les droites $a'o'$, $b'o'$, $c'o'$ rencontrent la *directrice* commune des plans O, O′ en α, β, γ; d'où, par analogie, on conclut que ao, bo, co coupent cette même directrice aux points α', β', γ', où elle est rencontrée par $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$. Les points α, α', β, β', γ, γ' sont en involution, car ces points sont les intersections d'une même transversale par les six côtés du tétragone complet $abco$; donc :

Les six plans osculateurs, qu'on peut mener à la cubique gauche par deux points conjoints, rencontrent toute droite, qui est l'intersection de deux plans osculateurs, en six points en involution.

Et, par conséquent :

Les six points où la cubique gauche est rencontrée par deux plans conjoints, sont en involution, c'est-à-dire que, *les six plans menés par ces points et par une même corde de la cubique forment un faisceau en involution* (*).

Dans l'involution α, α', ..., γ', les trois points α, β, γ sont suffisants pour déterminer α', β', γ'. En effet, par les propriétés connues du tétragone complet, α' est conjugué harmonique de α, par rapport à β, γ; β' est conjugué harmonique de β, par rapport à γ, α; et γ' est conjugué harmonique de γ, par rapport à α, β. De même, on peut dire que, sur la cubique gauche, a', b', c' sont conjugués harmoniques de a, b, c, par rapport à b, c; c, a; a, b, respectivement. Ainsi, il y a une parfaite correspondance entre les points a et a', b et b', c et c'.

Nous avons vu que $a'o'$ est l'intersection du plan osculateur en a' par le plan tangent en a et sécant en a'. Donc ce dernier plan passe par α, et sa trace sur le plan O est $a\alpha$. De même, $b\beta$ est la trace du plan tangent

(*) *Annali di Matematica*, t. I, § 27, settembre-ottobre 1858.

en b et sécant en b', et $c\gamma$ est la trace du plan tangent en c et sécant en c'. Ces trois traces forment un triangle lmn homologique au triangle abc; le foyer o est le centre d'homologie, et la directrice $\alpha\beta\gamma$ est l'axe d'homologie.

8. La droite oo' est la focale de o et o', donc elle est une corde de la cubique gauche; soient i, j les points où oo' rencontre cette courbe; on a démontré que oo' est divisée harmoniquement par i, j (2). En conséquence, les quatre plans bc (o, o', i, j) forment un faisceau harmonique. Le premier de ces plans passe par a (c'est le plan O); le second passe par a', car bc et $a'o'$ sont dans un même plan (7); donc les points a, a', i, j forment, sur la cubique gauche, un système harmonique. Il en sera de même des points b, b', i, j, et des points c, c', i, j; donc i, j sont les points doubles de l'involution formée sur la cubique par les points a, a', b, b', c, c'.

Or, ces six points résultent des deux plans conjoints O, O'; donc si, par la même directrice $\alpha\beta\gamma$, on mène deux autres plans conjoints, nous aurons une autre involution de six points, qui aura les mêmes points doubles, car i, j dépendent de la droite $\alpha\beta\gamma$ seulement. Donc :

Une droite, intersection de deux plans osculateurs de la cubique gauche, est l'axe d'un faisceau de plans conjoints, deux à deux. Chaque couple de plans conjoints rencontre la cubique en six points en involution, et les involutions correspondantes à tous ces couples constituent une involution unique, car elles ont toutes les mêmes points doubles.

Une corde de la cubique gauche contient une infinité de points conjoints, deux à deux. Chaque couple de points conjoints donne six plans osculateurs en involution; les involutions correspondantes à tous ces couples *constituent une involution unique, car elles ont toutes les mêmes plans doubles.*

On sait d'ailleurs que, si on a sur la cubique gauche des couples de points en involution, la droite qui joint deux points conjugués engendre un hyperboloïde (*); donc :

Dans un faisceau de plans conjoints menés par une même directrice, les droites qui joignent les points où chacun de ces plans rencontre la cubique gauche, aux points correspondants dans le plan conjoint, forment un hyperboloïde passant par la courbe.

Dans un système de points conjoints situés sur une même corde de la cubique gauche, les droites intersections des plans osculateurs menés par chacun de ces points, par les plans osculateurs correspondants menés par le point conjoint, forment un hyperboloïde inscrit dans la développable osculatrice de la courbe gauche (**).

9. Soient d, e, f les points où ao, bo, co rencontrent les droites tangentes à la cubique gauche en a', b', c' respectivement. De même, soient d', e', f' les points où les tangentes à la cubique en a, b, c percent le plan O'. Cherchons à déterminer la conique qui existe dans le plan O, et qui est le lieu des pôles du plan O' par rapport aux coniques inscrites dans la développable osculatrice de la cubique (3). La conique inscrite, qui est dans le plan osculateur en a', passe évidemment par a' et d'; le point de concours des tangentes en ces points sera le pôle de O' par rapport à cette conique. Mais ce pôle doit être dans le plan O; outre cela, la tangente en a' à la conique inscrite est la tangente à la cubique en ce

(*) *Compte rendu, etc., u. s.,* § 21.

(**) *Annali di Matematica,* t. II, § 10, 11, gennajo-febbrajo 1859.

même point; donc le pôle qu'on cherche est d. Par conséquent, la conique *locale des pôles* passe par d, e, f.

Je vais construire le point d. Observons que le cône du second degré, perspectif à la cubique gauche et ayant son sommet en a', contient les génératrices $a'(a, b, c, a', b', c')$; $a'a'$ exprime la tangente à la cubique en a'. Donc la conique, intersection de ce cône par le plan O, passe par a, b, c, β', γ' et par le point inconnu d (trace de $a'a'$ sur O). Ainsi il suffit d'appliquer le théorème de Pascal (*hexagramma mysticum*) à l'hexagone inscrit $adb\beta'c'\gamma'$; qu'on joigne l'intersection de $b\beta'$ et $a\gamma'$ à l'intersection de ao et $c\beta'$; la droite ainsi obtenue rencontre $c\gamma'$ en un point qui, joint à b, donnera une droite passant par d; d'ailleurs ce point appartient à ao; donc, etc.

Ainsi on peut construire les points d, e, f qui sont les traces, sur O, des droites tangentes à la cubique gauche en a', b', c' : mais les plans osculateurs en ces points passent par les tangentes dont il s'agit; donc, $a'o'$, $b'o'$, $c'o'$ étant les traces de ces plans sur O′, leurs traces sur O seront αd, βe, γf.

Le point de concours des plans osculateurs en a, b', c' appartient au plan $ab'c'$; mais ce plan passe par ao, donc (5) son foyer est sur cette droite. Cela revient à dire que βe, γf coupent ao en un même point g. Par consequent, les droites αd, βe, γf forment un triangle ghk homologique au triangle abc; o est le centre et $\alpha\beta\gamma$ l'axe d'homologie.

10. Reprenons la conique suivant laquelle le plan O coupe le cône du second degré, perspectif à la cubique gauche et ayant son sommet en a'. Les plans $a'hk$ et $a'mn$ sont tangents à ce cône; donc la conique susdite est touchée en a par mn et en d par hk. Ces droites tangentes s'entrecoupent en α sur la directrice du plan O; donc le

pôle de cette directrice, par rapport à la conique, est sur ao; par conséquent, ce pôle est le point p conjugué harmonique de α' par rapport à a, d. On trouvera ainsi des points analogues q, r sur bo, co.

On voit aisément que α' est conjugué harmonique de g par rapport à a, p; de p par rapport à g, o; de o par rapport à d, p; de même pour β' et γ'. Le point o est le pôle harmonique de la droite $\alpha\beta\gamma$, par rapport à tous les triangles lmn, abc, ghk, pqr, def homologiques entre eux.

11. Continuons à déterminer la conique *locale des pôles*. Les plans osculateurs à la cubique gauche en i, j (8) passent par $\alpha\beta\gamma$; les coniques inscrites (dans la développable osculatrice) qui sont dans ces plans touchent $\alpha\beta\gamma$ en deux points x, y, et jx, iy sont tangentes à la cubique en j, i respectivement. Il s'ensuit que x, y sont les points doubles de l'involution α, α', β, β', γ, γ'. Il est évident aussi que x, y sont les pôles des plans O, O', par rapport aux coniques inscrites mentionnées précédemment; donc les coniques locales des pôles des plans O, O' passent par x, y.

Or l'hyperboloïde, lieu des droites intersections des plans osculateurs en a, a', b, b', c, c',... (8, dernier théorème), contient évidemment les tangentes à la cubique gauche en i, j, c'est-à-dire qu'il passe par x, y. Il passe aussi par d, e, f, car d est un point de l'intersection des plans osculateurs en a, a', etc. Donc la conique locale des pôles du plan O', à laquelle appartiennent les points d, e, f, x, y, est tout entière sur l'hyperboloïde dont nous parlons.

La suite prochainement.