NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V.-A. LEBESGUE

Arithmologie élémentaire - application à l'algèbre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 219-227

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__219_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ARITHMOLOGIE ÉLÉMENTAIRE — APPLICATION A L'ALGÈBRE;

PAR M. V.-A. LEBESGUE,
Correspondant de l'Institut.

Mon excellent et bien regrettable ami M. Terquem affectionnait les mots *arithmologue*, *arithmologie*: c'est ce qui m'a décidé à donner à cet article et à d'autres qui le suivront, le titre qu'il porte et qui aurait été plus clair en ces termes : *Recherches élémentaires sur les nombres entiers*.

1. Un fait arithmétique auquel on est conduit dans plusieurs recherches, c'est que le produit de n nombres entiers consécutifs m, $m-1$, $m-2,\ldots\, m-n+1$, ou dans un autre ordre k, $k+1$, $k+2,\ldots, k+n-1$, est divisible par le produit $1.2.3\ldots n = \Pi n$.

Il y a quelque avantage à le prouver comme il suit : on a

$$\frac{k(k+1)\ldots(k+n-1)}{1.2\ldots n} - \frac{(k-1).k\ldots(k-n-2)}{1.\ 2\ldots n} = \frac{k.(k+1)\ldots(k+n-1)}{1.2\ldots n-1)},$$

mettant pour k les nombres 2, 3,..., k et sommant, il vient

$$\frac{k(k+1)\ldots(k+n-1)}{1.2\ldots n}-\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots n}$$

$$=\frac{2.3\ldots n}{1.2\ldots n-1}+\frac{3.4\ldots n-1}{1.2\ldots n-1}+\ldots\frac{k.(k+1)\ldots(k+n-2)}{1.2\ldots n-1}.$$

Transposant

$$\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots n}=\frac{1.2\ldots n-1}{1.2\ldots n-1}=1,$$

on a

$$(a)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1.2\ldots n-1}{1.2\ldots n-1}+\dfrac{2.3\ldots n}{1.2\ldots n-1}+\dfrac{3.4\ldots n+1}{1.2\ldots n-1}+\ldots\\[2ex] +\dfrac{k(k+1)\ldots(k+n-2)}{1.2\ldots n-1}=\dfrac{k.(k+1)\ldots(k+n-2)}{1.2\ldots n}.\end{array}\right.$$

La somme des termes du premier membre que l'on peut indiquer par $\sum\frac{k(k+1)\ldots(k+n-2)}{1.2\ldots n-1}$ s'obtient en mettant un facteur de plus à chaque terme de l'expression fractionnaire $\frac{k.(k+1)\ldots(k+n-2)}{1.2\ldots n-1}$.

Si dans (a) on pose $n=2$, tous les termes du premier membre sont entiers, par suite le second membre $\frac{k(k+1)}{1.2}$ est entier. De même pour $n=3$, il suit de ce qui vient d'être dit que tous les termes du premier membre sont entiers, donc le second $\frac{k(k+1)(k+2)}{1.2.3}$ l'est aussi, et ainsi de suite.

On pourrait, en se donnant immédiatement l'équation (a), la vérifier; en ajoutant à chaque membre

$\frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+n-1)}{1.2\ldots n-1}$, on verrait le second membre se réduire à $\frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+n)}{1.2\ldots n}$.

On pourrait encore réduire les deux premiers termes en un seul, puis y joindre le troisième et réduire la somme à un seul terme; et ainsi de suite.

On vérifierait de même ces égalités

$$(b)\left\{\begin{aligned} &1+\frac{x}{1}+\frac{x(x+1)}{1.2}+\ldots+\frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{1.2\ldots n} \\ &\qquad=\frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{1.2\ldots n}, \end{aligned}\right.$$

et de même, ou par le changement du signe de x,

$$(c)\left\{\begin{aligned} &1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1.2}-\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)\ldots(x+n-1)}{1.2\ldots n} \\ &\qquad=(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{1.2\ldots n}. \end{aligned}\right.$$

2. Voici diverses conséquences de la formule (a).

Nombres figurés. — Posez les séries qui suivent :

$$(1)\qquad 1,\ 2,\ 3,\ldots, m$$

$$(2)\qquad 1,\ 3,\ 6,\ldots,\frac{m(m+1)}{1.2}$$

$$(3)\qquad 1,\ 4,\ 10,\ldots,\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}$$

$$(4)\qquad 1,\ 5,\ 15,\ldots,\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3.4}$$

. . . .

et vous aurez les nombres dits *figurés*. Les nombres (1) sont les nombres *naturels*. Les nombres (2) sont les nombres *triangulaires ;* on les forme ainsi : d'abord 1 premier terme de (1), puis $1+2=3$ somme des deux premiers termes de (2), puis $1+2+3=6$ somme des trois premiers termes de (1), et ainsi de suite. Les nombres (3) sont les nombres *pyramidaux*; ils se tirent de (2), comme les nombres de (2) se tirent des nombres (1). Les nombres (4) sont les nombres triangulo-triangulaires, etc., etc.

Les termes généraux donnent cette proposition, due à Fermat :

Multipliez le nombre naturel m, par le nombre naturel qui suit immédiatement, vous aurez le double du nombre triangulaire. Multipliez le nombre naturel m par le nombre triangulaire $\frac{(m+1)(m+2)}{1.2}$ *du nombre* $m+1$, *vous aurez le triple du nombre pyramidal de m; et ainsi de suite.* Fermat ajoute : « *Nec existimo pulchrius » aut generalius in numeris posse dari theorema, cujus » demonstrationem margini inserere nec curat nec » vacat.* » Du temps de Fermat, les notations incommodes voilaient les conséquences même assez immédiates des opérations indiquées par les formules.

3. Voici d'autres conséquences de l'équation (a).

Théorème. — *Si l'on combine m lettres n à n sans admettre la répétition d'une lettre, le nombre des combinaisons sera*

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}.$$

Ce serait

$$\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots n},$$

si l'on admettait la répétition des lettres.

Démonstration — Pour les lettres $a, b, c, \ldots, k$, au nombre de m, en plaçant a devant a, b, c,..., k, puis b devant b, c,..., k, et ainsi de suite, on aura les combinaisons deux à deux en nombre

$$m+(m-1)+\ldots+2+1=\frac{m(m+1)}{1.2.};$$

dans ce cas les lettres a, b,... se répètent. Si l'on avait placé a devant b, c,..., k, puis b devant c, d,..., k, et ainsi de suite, le nombre des combinaisons eût été

$$(m-1)+(m-2)+\ldots+2+1=\frac{(m-1)m}{1.2}=\frac{m(m-1)}{1.2}.$$

Dans ce cas il n'y a pas répétition.

Des combinaisons de deux lettres on passe à celles de trois, et ainsi de suite.

Théorème. — *Le nombre des permutations des lettres de la combinaison* $abc\ldots f$ *de* n *lettres toutes différentes est*

$$1.2.3\ldots n=\Pi n.$$

Théorème. — *Le nombre des permutations des* n *lettres non toutes différentes de la combinaison*

$$aa\ldots abb\ldots bcc\ldots c\ldots=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots$$

est égal à

$$\frac{\Pi n}{\Pi\alpha.\Pi\beta.\Pi\gamma}=\frac{\Pi(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)}{\Pi\alpha.\Pi\beta.\Pi\gamma\ldots}.$$

La démonstration du premier théorème est parfaitement connue; il suffira d'indiquer en peu de mots celle du second. Soient a, b,..., f les lettres au nombre de α, de l'arrangement

$$-a-b-\ldots-f-,$$

on en tire

$$1.2\ldots\alpha=\Pi\alpha$$

par la transposition des seules lettres $a, b\ldots, f$ permutées entre elles, et sans déplacer ou séparer les lettres indiquées par les traits. Donc si l'on a

$$a = b = \ldots = f,$$

les $\Pi\alpha$ arrangements se réduiront à un seul, et il faudra remplacer Πn par $\frac{\Pi n}{\Pi\alpha}$; on voit de même que si β autres lettres devenaient égales entre elles, le nombre de permutations serait $\frac{\Pi n}{\Pi\alpha . \Pi\beta}$, et ainsi de suite. Chacun donnera à cette démonstration les développements qui manquent.

Théorème. — *Le développement* $(a + b + c \ldots + k)^n$, *où les lettres* $a, b, c, \ldots, k$ *sont au nombre de* m, *a* $m \times m \times \ldots m = m^n$ *termes qui sont les arrangements* m *à* m *avec répétition. Si l'on rétablit l'ordre alphabétique de manière à former des combinaisons, la combinaison* $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ où $\alpha + \beta + \gamma \ldots = n$ *est prise un nombre de fois égal à*

$$\frac{\Pi(\alpha + \beta + \gamma + \ldots)}{\Pi\alpha . \Pi\beta\ \Pi\gamma}.$$

Le terme général du développement est

$$\frac{\Pi(\alpha + \beta + \gamma + \ldots)}{\Pi\alpha . \Pi\beta . \Pi\gamma \ldots} a^\alpha b^\beta c^\gamma,$$

sous la relation

$$\alpha + \beta + \gamma \ldots = n.$$

Le nombre des termes (qui est celui des combinaisons avec répétition) est

$$\frac{m\ (m + 1) \ldots (m + n - 1)}{1 . 2 \ldots n}.$$

Les différentes parties de cet énoncé sont évidentes par ce qui précède; on peut ajouter que le nombre des arrangements n à n sans répétition est, pour m lettres, $m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$, au lieu d'être $m.m\ldots m = m^n$.

4. Il est naturel de passer du cas du polynôme à celui du binôme. Le terme général du développement

$$(a+b)^m$$

est

$$\frac{\Pi(\alpha+\beta)}{\Pi\alpha.\Pi\beta} a^\alpha b^\beta, \quad \alpha+\beta = m.$$

Comme on a

$$\frac{\Pi(\alpha+\beta)}{\Pi\alpha.\Pi\beta} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+\beta)}{1.2\ldots\beta}$$
$$= \frac{m(m-1)\ldots(m-\beta+1)}{1.2\ldots\beta},$$

le coefficient de $a^\alpha b^\beta$ est le nombre des combinaisons β à β de m lettres. C'est aussi celui de m lettres combinées α à α.

Pour bien voir comment les combinaisons s'introduisent dans le développement de $(1+x)^m$, il faut considérer le produit

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx)\ldots(1+kx)$$

de m facteurs. Si on fait la multiplication régulièrement, on verra que x^i a pour coefficient la *somme* des combinaisons i à i des m lettres $a, b, \ldots, k$; et quand on posera

$$a = b = c \ldots = 1,$$

chaque combinaison se réduisant à l'unité, le coefficient de x^i dans $(1+x)^m$ sera le nombre de combinaisons de m lettres i à i.

De même dans le développement de

$$(1-x)^{-m}=\frac{1}{(1-x)^m}$$

on verra comme il suit que le coefficient de x^i est le nombre de combinaisons avec répétition de m lettres prises i à i.

On a identiquement

$$\frac{1-a^m x^m}{1-ax}=1+ax+a^2x^2+\ldots+a^{m-1}x^{m-1}.$$

Supposant $x<1$ et m de plus en plus grand, on aura

$$\frac{1}{1-ax}=1+ax+a^2x^2+\ldots.$$

Si l'on fait le produit de m équations semblables

$$\frac{1}{1-bx}=1+bx+b^2x^2+\ldots,$$

$$\frac{1}{1-cx}=1+cx+c^2x^2+\ldots,$$

$$\frac{1}{1-kx}=1+kx+k^2x^2+\ldots,$$

on verra que dans le produit des seconds membres le coefficient de x^i est la *somme* des combinaisons avec répétition des m lettres a, b, . . ., k prises i à i.

Puis si l'on fait

$$a=b=c\ldots=k=1,$$

on verra que dans le produit

$$\frac{1}{(1-x)^m}=(1-x)^{-m}$$

le coefficient de x^i sera le nombre de combinaisons avec répétition de m lettres i à i, parce que chaque combinaison se réduira à l'unité.

Il faut remarquer que si dans $(1-x)^m$ on change le signe de m, on tombe sur la formule précédente

$$(1-x)^{-m}=1+mx+\frac{m(m+1)}{1.2}x^2+\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}x^3+\ldots$$

N. B. Quand on combine des lettres avec répétition, s'il y a m lettres et que l'on combine i à i pour $i>m$, la répétition sera forcée, mais dans les autres cas, parmi les combinaisons, il y en a où des lettres se répètent, d'autres où elles ne se répètent pas. Dans l'ensemble des combinaisons avec répétition les unes sont avec répétition et les autres sans répétition.

Les nombres de la forme

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}=(m,n)$$

donnent lieu à beaucoup d'autres égalités ; il suffira pour le moment d'avoir vu leur emploi dans la théorie des combinaisons et dans le développement de la puissance

$$(a+b+c+\ldots+k)^n.$$

Dans un autre article il sera prouvé d'une autre manière que le nombre (m, n) est entier, et l'on en déduira d'autres conséquences.