H. DELORME

Solution des questions américaines n° 3 et 5

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 176-179

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__176_1>

SOLUTION DES QUESTIONS AMÉRICAINES N^os 3 ET 5;

PAR M. H. DELORME.

Question 3.

Entre les deux relations

$$x \cos(\varphi + \alpha) + y \sin(\varphi + \alpha) = a \sin 2\varphi,$$

$$y \cos(\varphi + \alpha) - x \sin(\varphi + \alpha) = 2a \cos 2\varphi \ (^*),$$

(*) C'est par erreur qu'il y a dans l'énoncé

$$y \cos(\varphi + \alpha) + x \sin(\varphi + \alpha) = 2a \cos 2\varphi.$$

on élimine φ. Démontrer que l'on obtient la relation

$$(y \sin\alpha + x \cos\alpha)^{\frac{2}{3}} + (x \sin\alpha - y \cos\alpha)^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}.$$

Nous pouvons considérer la première équation comme représentant une droite variant de position pour les différentes valeurs de φ.

Remarquons que la seconde équation est précisément la dérivée par rapport à φ de la première. Eliminer φ entre ces deux équations revient donc à trouver l'enveloppe des droites représentées par la première. Changeons les axes des coordonnées et prenons pour nouveaux axes les axes rectangulaires définis, l'axe des x par l'équation

$$y \sin\alpha + x \cos\alpha = 0,$$

et l'axe des y par l'équation

$$y \cos\alpha + x \sin\alpha = 0.$$

Ce changement d'axes revient à faire tourner les axes de l'angle α et à changer le sens des y positifs. La première équation devient

$$\begin{gathered}(y \sin\alpha + x \cos\alpha) \cos(\varphi + \alpha) \\ + (x \sin\alpha - y \cos\alpha) \sin(\varphi + \alpha) = a \sin 2\varphi.\end{gathered}$$

Cherchons l'ordonnée et l'abscisse à l'origine

$$\begin{aligned} y &= -2a \cos\varphi, \\ x &= 2a \sin\varphi, \\ x^2 + y^2 &= 4a^2. \end{aligned}$$

Les droites définies par l'équation précédente sont donc des droites dont la partie interceptée entre les deux axes est constante et égale $2a$. On sait que l'enveloppe de pareilles droites est

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}.$$

Revenant aux anciens axes, on obtient

$$(y \sin\alpha + x \cos a)^{\frac{2}{3}} + (x \sin\alpha - y \cos\alpha)^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}},$$

ce qui est la relation demandée.

Question 5.

Les ellipses définies par l'équation

$$ax^2 + by^2 = 1,$$

dans laquelle a et b sont des variables assujetties à la relation $b - a = c$, sont coupées par la courbe

$$x = \mathrm{C}e^{-\frac{cy^2}{2}}$$

sous un angle dont la tangente est $\frac{y}{x}$ (*).

Soit V l'angle des deux tangentes aux courbes au point commun x, y; soient α et α' les angles des tangentes avec l'axe des x. On a

$$\operatorname{tang} \mathrm{V} = \frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\alpha'}{1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha'},$$

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{ax}{by}.$$

Pour avoir $\operatorname{tang}\alpha'$, remarquons que l'équation de la courbe donnée peut s'écrire

$$\mathrm{L}x + \frac{cy^2}{2} - \mathrm{LC} = 0,$$

(*) L'énoncé était encore inexact : il y a $a - b = c$ et $\frac{x}{y}$ au lieu de $b - a = c$ et de $\frac{y}{x}$.

$$\operatorname{tang}\alpha' = -\frac{f_x'}{f_y'}.$$

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{-\frac{1}{x}}{cy} = -\frac{1}{cxy},$$

$$\operatorname{tang}V = \frac{-\frac{ax}{by} + \frac{1}{cxy}}{1 + \frac{ax}{bcxy^2}} = \frac{y}{x}\,\frac{b - acx^2}{a + bcy^2},$$

$$\operatorname{tang}V = \frac{y}{x}\,\frac{b - acx^2 - a - bcy^2 + a + bcy^2}{a + bcy^2}.$$

Mais le point x, y étant sur l'ellipse,

$$acx^2 + bcy^2 = c,$$

$$\operatorname{tang}V = \frac{b - a - c + a + bcy^2}{a + bcy^2}\,\frac{y}{x},$$

et comme $b - a = c$,

$$\operatorname{tang}V = \frac{y}{x}.$$

C. Q. F. D.