Démonstration d'un théorème d'Apollonius

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 176

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__176_0>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME D'APOLLONIUS;

PAR UN ÉLÈVE DU LYCÉE NAPOLÉON.

La différence des carrés des diamètres conjugués d'une hyperbole est constante.

L'hyperbole rapportée à ses asymptotes Ox, Oy a pour équation $xy = k^2$. En un point quelconque M, (x, y) de la courbe, on mène la tangente MA qui rencontre en A l'asymptote Ox, et l'on prend le point P milieu de OA. Il s'ensuit

$$\mathrm{MP} = y, \quad \mathrm{OP} = \mathrm{PA} = x.$$

Et en posant

$$\mathrm{OM} = a', \quad \mathrm{MA} = b', \quad yOx = \theta,$$

les triangles OMP, MPA donnent

$$a'^2 = y^2 + x^2 + 2xy\cos\theta, \quad b'^2 = y^2 + x^2 - 2xy\cos\theta.$$

D'où

$$a'^2 - b'^2 = 4xy\cos\theta = 4k^2\cos\theta. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$