H. LEBASTEUR

Solution de la question 614

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 174-175

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__174_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 614

(voir page 126);

PAR M. H. LEBASTEUR,
Élève du lycée Napoléon (classe de M. Vacquant).

On sait que

$$FM = a - \frac{c}{a} MP,$$

MP étant l'abscisse du point M. D'après un théorème dû à Descartes, on a

$$\frac{\cos QMT}{\cos TMP} = \frac{c}{a}.$$

Or, des triangles PMT, TMQ, il résulte que

$$\frac{\cos QMT}{\cos TMP} = \frac{MQ}{MP}; \quad \text{donc} \quad MQ = \frac{c}{a} MP, \quad \text{et par suite} \quad FQ = a.$$

Ainsi le lieu géométrique du point Q est un cercle décrit du point F comme centre avec a pour rayon.

L'analyse donne aussi une solution très-simple de la question.

Prenant pour axes le grand axe et la parallèle au petit axe menée par le foyer, et désignant par ε le rapport $\frac{c}{a}$ et par γ la fonction $x - \frac{b^2}{c}$: l'équation de l'ellipse deviendra

$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2 \gamma^2.$$

Une tangente quelconque MT a pour équation

$$(1) \qquad x \sin\varphi + y \cos\varphi = \varepsilon\gamma,$$

et la droite FM allant du foyer au point de contact :

$$(2) \qquad x \cos\varphi - y \sin\varphi = 0.$$

Soit $x = k$ l'équation d'une parallèle à l'axe des x.

L'équation générale des droites passant par le point de rencontre de cette dernière et de la tangente est

$$(3) \qquad x \sin\varphi + y \cos\varphi - \varepsilon\gamma + \lambda\,(x - k) = 0.$$

Déterminant λ de façon que (3) et (2) soient perpendiculaires l'une à l'autre, on trouve

$$\lambda = \varepsilon,$$

et alors on a, pour l'équation de la perpendiculaire TQ,

$$(4) \qquad x \sin\varphi + y \cos\varphi = \frac{c}{a}\left(k - \frac{b^2}{c}\right).$$

Eliminant φ entre les équations (2) et (4), et cela en faisant la somme des carrés, on a l'équation du lieu

$$x^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(k - \frac{b^2}{c}\right)^2,$$

résultat conforme à celui que nous a fourni la géométrie.