

RICHARD

Solution de la question 609

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 1
(1862), p. 159-160

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__159_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 609

(voir p. 31);

PAR M. RICHARD,
 Elève du lycée de Douai.

Soient $MF = c$ et soient x_1, y_1 , les coordonnées du point R, on a

$$\text{Equation de } Ff \dots y = -\frac{x_1 - c}{y_1} (x + c),$$

$$\text{Equation de } F'f' \dots y = -\frac{x_1 + c}{y_1} (x - c).$$

Les coordonnées de H sont x_1 et $\frac{c^2 - x_1^2}{y_1}$. Remarquant que le quadrilatère $FF'ff'$ est inscriptible, la hauteur RH est la polaire du point C; donc l'abscisse du point C est $\frac{c^2}{x_1}$ dont l'équation du cercle passant par les trois points R, H, C est

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_1^2 + \frac{(c^2 - x_1^2)^2}{y_1^2} & x_1 & \frac{c^2 - x_1^2}{y_1} & 1 \\ \frac{c^4}{x_1^2} & \frac{c^2}{x_1} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

La longueur de la tangente MT menée par l'origine sera

$$\left| \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_1^2 + \frac{(c^2 - x_1^2)^2}{y_1^2} & x_1 & \frac{c^2 - x_1^2}{y_1} \\ \frac{c^4}{x_1^2} & \frac{c^2}{x_1} & 0 \end{vmatrix} \right| : \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & \frac{c^2 - x_1^2}{y_1} & 1 \\ \frac{c^2}{x_1} & 0 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

Faisant sortir c^2 du numérateur, multipliant les deux déterminants par x_1 et y_1 , et retranchant la seconde colonne de la première dans le premier déterminant, on a

$$\delta^2 = -c^2 \left| \begin{array}{ccc|ccc} y_1^2 & x_1^2 & y_1^2 & x_1^2 & y_1^2 & 1 \\ \frac{(c^2 - x_1^2)^2}{y_1^2} & x_1^2 & c^2 - x_1^2 & x_1^2 & c^2 - x_1^2 & 1 \\ \frac{c^2 - x_1^2}{x_1^2} & 1 & 0 & c^2 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

Or le second déterminant, en retranchant la seconde ligne de la première, donne en développant

$$-(x_1^2 + y_1^2 - c^2)(x_1^2 - c^2).$$

Effectuant la même opération sur le second déterminant, on a

$$\begin{aligned} & (x_1^2 + y_1^2 - c^2) \left| \begin{array}{ccc|cc} \frac{y_1^2 + c^2 - x_1^2}{y_1^2} & 0 & 1 & & \\ \frac{(c^2 - x_1^2)^2}{y_1^2} & x_1^2 & c^2 & & \\ \frac{c^2 - x_1^2}{x_1^2} & 1 & 1 & & \end{array} \right| \\ &= (x_1^2 + y_1^2 - c^2) \left[\frac{(y_1^2 + c^2 - x_1^2)(x_1^2 - c^2)}{y_1^2} \right. \\ & \quad \left. + (c^2 - x_1^2) \left(\frac{c^2 - x_1^2}{y_1^2} - 1 \right) \right] \\ &= (x_1^2 + y_1^2 - c^2)(x_1^2 - c^2) \left[\frac{y_1^2 + c^2 - x_1^2 - c^2 + x_1^2 + y_1^2}{y_1^2} \right] \\ &= 2(x_1^2 - c^2)(x_1^2 + y_1^2 - c^2). \end{aligned}$$

Divisant, on a

$$\delta^2 = 2c^2, \quad \delta = c\sqrt{2},$$

quantité constante.

C. Q. F. D.