NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. BLAZEJARSKI

Solution élémentaire d'une question de probabilités

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 131-132

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__131_0>

SOLUTION ÉLÉMENTAIRE D'UNE QUESTION DE PROBABILITÉS;

PAR M. R. BLAZEJARSKI.

Si l'on a des nombres h_1, h_2, h_3,... (par exemple, les chiffres des tables de mortalité) déduits d'un nombre très-grand d'observations, et si l'on répète les mêmes observations sur un nombre plus limité de faits (par exemple, les chiffres l_1, l_2,..., de défunts d'une compagnie d'assurance), on attend avec probabilités P_1, P_2,... que ces nombres seront $L_1 + l_1$, $L_2 + l_2$,..., aux écarts l_1, l_2,... *Trouver la probabilité que la somme* $L_1 + L_2 + L_3 + \ldots$ *aura un écart* l.

Pour simplifier, prenons deux valeurs seulement L_1, L_2. Les probabilités des écarts l_1, l_2 sont $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x_1^2} dx_1$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x_2^2} dx_2$, où $x_1 = \frac{l_1}{A_1}$, $x_2 = \frac{l_2}{A_2}$ (A_1, A_2 ce sont les modules de convergence). Trouver la probabilité que $l_1 + l_2$ aura la valeur l, c'est-à-dire

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 = l. \tag{1}$$

Cette probabilité sera la somme

$$\mathrm{S} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x_1^2} dx_1 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x_2^2} dx_2,$$

avec la condition que tous les groupes de valeurs x_1, x_2 doivent satisfaire l'équation (1). Pour cela, si l'on prend pour x_1 des valeurs arbitraires depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, pour x_2 on doit prendre la valeur $\frac{l - A_1 x_1}{A_2}$, et la somme sera

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{dx_2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2-\left(\frac{l-A_1x_1}{A_2}\right)^2} dx_1 \\
&= \frac{dx_2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{A_2^2}[x_1(A_1^2+A_2^2)-2A_1lx_1+l^2]} dx_1 \\
&= \frac{A_2\,dx_2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{\frac{l^2}{A_1^2+A_2^2}}}{\sqrt{A_1^2+A_2^2}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Pour obtenir la valeur de $A_2 dx_2$, remarquons que x_1 et x_2 sont indépendants l'un de l'autre (comme dans les compagnies d'assurance le nombre de défunts d'un âge quelconque est indépendant du nombre d'un autre âge), alors x_2 peut changer et x_1 rester invariable et on tire de l'équation (1)

$$A_2 dx_2 = dl,$$

et la probabilité de la valeur l sera

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{l^2}{A_1^2+A_2^2}} \frac{dl}{\sqrt{A_1^2+A_2^2}},$$

ou, si l'on pose $l = x\sqrt{A_1^2+A_2^2}$ $(\sqrt{A_1^2+A_2^2})$ — module de convergence,

$$(3)\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx.$$

Si l'on a un troisième nombre L_3, dont l'écart est l_3, alors on cherchera la probabilité de la valeur l' de

$$x\sqrt{A_1^2+A_2^2} + A_3x_3 = l', \text{ etc.}$$