JOSEPH SACCHI

Démonstration du théorème sur les courbes planes de M. Strebor

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 1 (1862), p. 109-110

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__109_1>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME SUR LES COURBES PLANES DE M. STREBOR

(voir t. XIX, p. 33),

PAR M. JOSEPH SACCHI,
Professeur au lycée de Porte-Neuve, a Milan.

Soient : M_1 un point quelconque d'une courbe donnée (*); ν_1 et p_1 le rayon vecteur OM_1 et la perpendiculaire OP_1 à la droite M_1P_1, touchant la courbe en M_1; ω_1 et α_1 les angles que les ν_1 et p_1 forment avec une droite fixe OA. Sur le prolongement de OM_1 on prend $M_1N = \nu_1$, le lieu des points N sera une courbe semblable à la courbe donnée; par conséquent l'angle β que la normale NM à cette seconde courbe forme avec ON sera égal à celui des droites ν_1 et p_1, c'est-à-dire on aura $\beta = \alpha_1 - \omega_1$. Sur la normale NM que l'on prenne $NM = OM$, alors MM_1 est perpendiculaire sur OM_1. On doit prouver que la courbe lieu des points M est l'enveloppe des perpendiculaires qu'on mène aux extrémités des rayons vecteurs

(*) On prie de faire la figure.

de la courbe donnée; ou bien que la courbe donnée est la podaire de celle des points M.

En nommant ν, p, ω, les quantités relatives au point M et analogues à ν_1, p_1, ω_1, les triangles rectangles OM_1M, OP_1M_1 donnent

$$\cos(\omega_1 - \omega) = \frac{\nu_1}{\nu}, \quad \cos(\alpha_1 - \omega_1) = \frac{p_1}{\nu_1},$$

et, ayant $MO = MN$, on aura

$$\omega_1 - \omega = \beta = \alpha_1 - \omega_1,$$

desquelles on déduit

$$(1) \qquad \omega = 2\omega_1 - \alpha_1, \quad \nu = \frac{\nu_1^2}{p_1},$$

relations qui montrent que la courbe donnée est la podaire de la courbe lieu des points M.

En faisant la dérivée par rapport à ω_1 des équations (1), et en la désignant par un accent, en posant

$$r^2 - p^2 = q^2, \quad \nu_1^2 - p_1^2 = q_1^2,$$

et eu égard aux formules connues

$$\alpha'_1 = \frac{p'_1}{q_1}, \quad \omega' = \frac{p\nu'}{q\nu}, \quad 1 = \frac{p_1\nu'_1}{q_1\nu_1},$$

on obtient $p = \nu_1$, laquelle avec la seconde des équations (1) donne

$$\nu_1 = p. \quad p_1 = \frac{p^2}{\nu}.$$

En remplaçant, dans l'équation

$$\varphi(p_1, \nu_1) = 0$$

d'une courbe donnée, les p_1, ν_1, par ces dernières valeurs, on a l'équation de la courbe enveloppe des perpendiculaires menées aux extrémités des rayons vecteurs de la première courbe.