A.-D. GUIBERT

Sur quatre produits d'entiers consécutifs

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 102-109

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__102_1>

SUR QUATRE PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS;

PAR M. A.-D. GUIBERT.

Le produit de 8, *de* 9, *de* 10, *de* 11 *entiers consécutifs n'est jamais un carré.*

Quand il s'agit de 8 entiers consécutifs seulement, la proposition est déjà établie (*); mais la démonstration actuelle s'applique en même temps à ce cas et aux trois autres.

Soit $n(n+1)(n+2)\ldots$ le produit proposé dont le dernier facteur est $n+7$, $n+8$, $n+9$, $n+10$, suivant que le nombre des entiers consécutifs est 8, 9, 10, 11.

(*) *Voir* le t. XIX des *Nouvelles Annales*, p. 213.

Pour abréger, nous nommerons n, $n+1$, $n+2$, etc., *les facteurs en n* de leur produit.

Nous admettons que le produit proposé, qui sera, à volonté, l'un quelconque des quatre désignés dans l'énoncé, soit un carré, et nous nous proposons de faire ressortir l'absurdité d'une telle hypothèse.

Quelques observations préalables sont nécessaires.

Les différences entre les facteurs en n prouvent que tout diviseur premier commun à deux quelconques d'entre eux est nécessairement l'un des nombres 2, 3, 5, 7.

Par conséquent, le produit proposé étant un carré, si un facteur en n est premier avec $2 \times 3 \times 5 \times 7$, il doit être un carré.

Si un facteur en n n'est divisible que par un seul des nombres 2, 3, 5, 7, il est le produit d'une certaine puissance de ce nombre par un carré, ou, ce qui revient au même, eu égard à l'exposant de cette puissance, il est un carré ou le produit d'un carré, par ce nombre pris parmi 2, 3, 5, 7.

Autre remarque : Il est impossible que le produit proposé soit un carré, lorsque deux facteurs en n sont des carrés. Cela est vrai quels que soient les rangs de ces facteurs; mais, pour notre démonstration, il suffit qu'ils appartiennent aux huit premiers. Leur différence est alors comprise entre 1 et 8.

Or la différence de deux carrés n'est jamais ni 2, ni 4, ni 6. Si elle est égale à 3, les facteurs en n sont 1 et 4; le produit proposé, dont le premier facteur est 1, n'est manifestement pas un carré; si elle est égale à 5, les facteurs correspondants sont 4 et 9, et le produit proposé dont le premier facteur est alors l'un des entiers 2, 3, 4 n'est pas non plus un carré.

Cela posé, nous allons examiner tous les cas qui peuvent se présenter.

I^er^ CAS. *n est premier avec* $2 \times 3 \times 5 \times 7$.

Le nombre n n'ayant aucun diviseur commun avec les entiers qui le suivent, doit être un carré. Il sera de la forme $3g+1$, de l'une des formes $5h+1$, $5h+4$ et de l'une des formes $7k+1$, $7k+2$, $7k+4$.

Montrons qu'un autre des huit premiers entiers serait un carré.

Lorsque $n = 5h+1$, $n+6$ est premier avec 5; il est d'ailleurs premier avec 2×3; s'il est premier avec 7, il serait un carré; s'il est divisible par 7, aucun autre facteur en n n'est divisible par 7, il devrait donc être encore un carré.

Lorsque $n = 5h+4$, $n+4 = 5h+8$; et comme pour $n = 7k+1$, $7k+2$, $7k+4$, on a

$$n+4 = 7k+5,\ 7k+6,\ 7k+8,$$

il en résulte que $n+7$, premier avec 2×3, est aussi premier avec 5×7; ce facteur en n serait donc un carré.

II^e^ CAS. *n divisible par un seul des nombres* 2, 3, 5, 7.

1° n divisible par 2 et premier avec $3 \times 5 \times 7$.

n est un carré ou double d'un carré.

Soit d'abord n égal à un carré : il aura la forme $3g+1$.

$n+7$ est premier avec 2×3, il l'est également avec 5×7; car pour $n = 5h+1$, $5h+4$, $n+7 = 5h+8$, $5h+11$; et pour $n = 7k+1$, $7k+2$, $7k+4$, $n+7 = 7k+8$, $7k+9$, $7k+11$; $n+7$ serait donc un carré en même temps que n.

Soit ensuite n double d'un carré a^2, lequel sera de la forme $3g+1$.

$n+5$, premier avec 2×3, est évidemment premier avec 5; s'il est premier avec 7, il doit être un carré; et, de même, s'il est divisible par 7, aucun autre facteur en

n n'étant alors divisible par 7; mais, pour $a^2 = 5h + 1$, $5h + 4$, $n + 5 = 10h + 7$, $10h + 13$, formes qui ne conviennent à aucun carré.

2° n divisible par 3 et premier avec $2 \times 5 \times 7$.

n est un carré ou triple d'un carré.

Soit n égal à un carré.

Lorsque $n = 5h + 1$, $5h + 4$, $n + 2 = 5h + 3$, $5h + 6$; quand $n = 7k + 1$, $7k + 2$, $7k + 4$, $n + 2 = 7k + 3$, $7k + 4$, $7k + 6$; ce facteur, premier avec 2×3, est ainsi premier avec 5×7; il devrait donc être un carré.

Soit n triple d'un carré a^2.

Pour $a^2 = 5h + 1$, $n + 4$, premier avec 2×3, égalant $15h + 7$, est premier avec 5; donc, s'il est premier avec 7, il devrait être un carré; et, de même, s'il est divisible par 7, aucun autre facteur en n n'étant alors divisible par 7; mais $15h + 7$ ne représente aucun carré.

Pour $a^2 = 5h + 4$, $n + 4 = 15h + 16$; ce facteur, divisible ou non par 7, doit être un carré.

Or, quand $n + 4$ est divisible par 7, $n + 2$ ne l'est pas, et comme $n + 2 = 15h + 14$, il est premier avec 5; il serait donc aussi un carré. Lorsque $n + 4$ n'est pas divisible par 7, il est de l'une des formes $7k + 1$, $7k + 2$, la forme $7k + 4$ supposant n multiple de 7 : si $n + 4 = 7k + 1$, $n + 2$, égal à $7k - 1$, devrait être un carré; si $n + 4 = 7k + 2$, $n + 1$ premier avec 3, est premier avec 5×7; il serait donc le double d'un carré; mais $n + 1 = 7k - 1$ ne correspond au double d'aucun carré.

3° n divisible par 5 est premier avec $2 \times 3 \times 7$.

n ne saurait être un carré; car, pour $n = 7k + 1$, $7k + 2$, $7k + 4$, le facteur $n + 4$, premier avec $2 \times 3 \times 5$, prenant les formes respectives $7k + 5$, $7k + 6$, $7k + 8$, devrait être en même temps un carré.

Soit donc n égal à 5 fois un carré, lequel sera de la forme $3g + 1$.

$n + 6$ est premier avec $2 \times 3 \times 5$; s'il est premier avec 7, il devrait être un carré; et de même, à cause de son rang, s'il est divisible par 7; mais $n + 6$, égal à $15g + 11$, n'a pas la forme d'un carré.

4° n divisible par 7 et premier avec $2 \times 3 \times 5$.

En supposant que n soit un carré, on trouve que $n + 6$ ou $n + 4$ serait un carré, selon que n égale $5h + 1$ ou $5h + 4$.

Soit n égal à 7 fois un carré a^2, lequel sera de la forme $3g + 1$ et de l'une des formes $5h + 1$, $5h + 4$. On trouve ici que $n + 6 = 35h + 13$, $35h + 34$, devrait être un carré. Or aucune de ces formes ne peut être celle d'un carré.

III^e Cas. *n divisible par deux des nombres* 2, 3, 5, 7 *et premier avec les deux autres.*

1° n divisible par 2×3 et premier avec 5×7.

$n + 5$ est premier avec $2 \times 3 \times 5$, donc, divisible ou non par 7, il doit être un carré; mais, pour

$$n + 5 = 5h + 1,\ 5h + 4,$$

on a

$$n + 7 = 5h + 3,\ 5h + 6;$$

donc ce dernier facteur en n devrait être aussi un carré.

2° n divisible par 2×5 et premier avec 3×7.

$n + 3$ est premier avec $2 \times 3 \times 5$.

Quand $n + 8$ est premier avec 7, il est un carré; et si l'on pose $n + 3 = 3g + 1$, $n + 7$ devient égal à $3g + 5$; donc ce facteur en n, premier avec $2 \times 5 \times 7$, est premier avec 3; par conséquent il serait un carré.

Lorsque $n + 3$ est divisible par 7, si $n + 3 = 3m + 1$, le facteur $n + 7 = 3m + 8$ devrait être un carré : si

$n+3=3m+2$, $n+7$, premier avec $2\times5\times7$, est multiple de 3; mais $n+2$, égal à $3m+1$ et premier avec $3\times5\times7$, n'a pas une forme compatible avec celle du double d'un carré; donc il doit être un carré, et $n+7$ serait le triple d'un carré; or, pour $n+2=5h+1$, $n+7=5h+6$, et pour $n+2=5h+4$, $n+7=5h+9$, chacune de ces valeurs de $n+7$ ne saurait être celle du triple d'un carré.

3° n divisible par 2×7 et premier avec 3×5.

Soit d'abord $n+3$ premier avec 5; ce facteur en n sera un carré, puisqu'il est évidemment premier avec $2\times3\times7$. Mais, pour $n+3=5h+1$, $5h+4$, on a

$$n+1=5h-1,\quad 5h+3;$$

$n+1$, premier avec $2\times3\times7$, est premier ainsi avec 5, il devrait donc être aussi un carré.

Soit ensuite $n+3$ divisible par 5 : si $n=3m+1$, $n+1$ doit être un carré, et $n+6=3m+7$, premier avec $3\times5\times7$, serait le double d'un carré; si $n=3m+2$, $n+5$, premier avec $2\times5\times7$, est premier avec 3; ce facteur en n devrait être un carré, ce qui est impossible; car, d'après l'hypothèse, $n+5$ est un multiple de 5 plus 2.

4° n divisible par 3×5 et premier avec 2×7.

$n+2$ et $n+6$ sont premiers avec $2\times3\times5$.

Si aucun de ces facteurs en n n'était divisible par 7, ils seraient des carrés.

Si $n+2=7m$, $n+4$ est un carré; $n+1=7m-1$, premier avec $3\times5\times7$, devrait être le double d'un carré.

Si $n+4=7m$, $n+1$ est un carré, et $n+7=7m+3$ devrait être double d'un carré.

5° n divisible par 3×7 et premier avec 2×5.

Les facteurs $n+3$, $n+4$ sont premiers avec

$2 \times 3 \times 7$: si ni l'un ni l'autre n'était divisible par 5, ils seraient tous deux des carrés.

Lorsque $n + 2 = 5m$, $n + 4 = 5m + 2$; ce dernier facteur en n devrait être un carré.

Quand $n + 4 = 5m$, $n + 2$, égal à $5m - 2$, serait un carré.

6° n divisible par 5×7 et premier avec 2×3.

$n + 6$, premier avec $2 \times 3 \times 5 \times 7$, doit être un carré.

Si $n = 3m + 1$, le facteur $n + 4$ serait un carré ; si $n = 3m + 2$, $n + 2$ devrait être un carré.

IV^e^ Cas. *n divisible par trois des nombres* 2, 3, 5, 7 *et premier avec le quatrième.*

1° n divisible par $2 \times 3 \times 5$ et premier avec 7.

$n + 7$ étant premier avec $2 \times 3 \times 5$ doit être un carré, mais, pour $n + 7 = 7k + 1$, $7k + 2$, $7k + 4$, on a $n + 1 = 7k - 5$, $7k - 4$, $7k - 2$; ce dernier facteur en n est ainsi premier avec 7, il l'est d'ailleurs avec $2 \times 3 \times 5$, donc il serait aussi un carré.

2° n divisible par $2 \times 3 \times 7$ et premier avec 5.

$n + 5$ doit être un carré.

Si $n + 5 = 5h + 1$, $n + 1$, égal à $5h - 3$, est premier avec 5, il serait donc un carré : si $n + 5 = 5h + 4$, $n + 2$, premier avec 3×7, est aussi premier avec 5 ; il devrait donc être le double d'un carré, ce qui est impossible d'après sa valeur $5h + 7$.

3° n divisible par $2 \times 5 \times 7$ et premier avec 3.

$n + 3$ est un carré de la forme $3g + 1$; $n + 1$ serait un carré.

4° n divisible par $3 \times 5 \times 7$ et premier avec 2.

Les facteurs $n + 2$, $n + 4$ devraient être des carrés.

V^e^ Cas. *n divisible par* $2 \times 3 \times 5 \times 7$.

$n + 1$ est un carré ; $n + 4 = 5h + 4$ serait le double d'un carré.

La propriété objet de cette Note est ainsi établie.

On verrait semblablement que le produit de 12, de 13 entiers consécutifs n'est point un carré. Les nombres premiers à considérer seraient 2, 3, 5, 7 et 11. Pareille propriété se prouverait pour le produit de 14, de 15, de 16 et de 17 entiers consécutifs. Ces quatre cas se rapportent aux nombres premiers 2, 3, 5, 7, 9, 11 et 13. On peut continuer ainsi, en liant entre eux plusieurs cas, mais la démonstration devient de plus en plus pénible.