

STANISLAS KAMINSKY

Solution de la question 551

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 20
(1861), p. 97-99

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__97_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 554

(voir t. XIX, p. 404);

PAR M. STANISLAS KAMINSKY.

1. *Lemme.* La somme de deux carrés n'est jamais de la forme $4n + 3$.

2. *Lemme.* Un nombre pair de facteurs de la forme $4n + 3$ donne un produit de la forme $4n + 1$.

Un nombre impair de facteurs de la forme $4n + 3$ donne un produit de même forme.

3. *Lemme.* La somme de deux carrés impairs est de la forme $4n + 2$.

THÉORÈME. *L'équation*

$$(1) \quad x^2 + y^2 = pz^2,$$

p étant un nombre de la forme $4n + 3$, est impossible en nombres rationnels.

Démonstration. Soient

$$x = \frac{m}{l}, \quad y = \frac{n}{q}$$

deux nombres fractionnaires irréductibles; on devra

avoir

$$(2) \quad m^2 q^2 + n^2 l^2 = p q^2 l^2.$$

Il y a trois cas.

1^{er} CAS. q et l impairs; alors $q^2 l^2$ est de la forme $4n + 1$ (lemme 2), donc $p q^2 l^2$ est de la forme $4n + 3$; par conséquent l'équation (2) est impossible (lemme 1).

2^e CAS. q pair et l impair; $n^2 l^2 = p q^2 l^2 - m^2 q^2$; équation impossible, car q étant pair, n est impair; donc $n^2 l^2$ est impair.

3^e CAS. q pair et l pair; faisons

$$q = 2^r q_1, \quad l = 2^s l_1 \quad \text{et} \quad s > r;$$

l_1 et q_1 sont impairs; donc

$$2^{2r} m^2 q_1^{l_1} + 2^{2s} n^2 l_1^2 = p 2^{r+2s} q_1^{l_1} l_1^2$$

ou

$$m^2 q_1^{l_1} + 2^{2(s-r)} n^2 l_1^2 = 2^{r+2s} q_1^{l_1} l_1^2;$$

équation impossible, car $m^2 q_1^{l_1}$ est impair.

Autre démonstration d'après Legendre.

Si

$$p = s^2 t, \quad \text{on pose} \quad sz = z'$$

et l'équation (1) conserve la même forme; donc on peut admettre que p ne renferme pas de diviseur carré.

Soit donc

$$p = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n;$$

les α sont des nombres premiers.

Legendre démontre (*Théorie des nombres*, 2^e éd., p. 31) que l'équation (1) n'est possible qu'autant qu'il existe un nombre entier λ qui satisfasse à l'équation

$$\lambda^2 + 1 = pu;$$

u étant un nombre entier, on devra donc avoir simultanément les équations

$$\lambda^2 + 1 = \alpha_1 u_1 = \alpha_2 u_2 = \alpha_3 u_3 \dots = \alpha_n u_n;$$

les u étant des nombres entiers; or, pour que l'équation

$$\lambda^2 + 1 = \alpha_t u_t$$

soit possible, il faut que l'on ait

$$(-1)^{\frac{\alpha_t - 1}{2}} - 1 = \alpha_t v;$$

v nombre entier (*Théorie des nombres*, 2^e édit., p. 170).
Or p étant de la forme $4n + 3$, il faut qu'il y ait un nombre impair de α de cette forme (lemme 2) et au moins un.

Soit donc

$$\alpha_t = 4n + 3;$$

on devra avoir

$$(-1)^{2n+1} - 1 = \alpha_t v, \quad \text{ou} \quad -2 = \alpha_t v;$$

équation impossible; donc, etc.