

F.-A. BEYNAC

**Questions d'examen (École
polytechnique, 1860)**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 20
(1861), p. 7-15

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__7_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS D'EXAMEN (ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 1860) ;

PAR M. F.-A. BEYNAC,
Professeur.

I. Quel est le plus grand des nombres

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{3}, \quad \sqrt[4]{4}, \dots ?$$

Considérons les deux nombres $\sqrt[n]{n}$, $\sqrt[n+1]{n+1}$; pour les comparer, réduisons-les au même indice, il vient

$$\sqrt[n(n+1)]{n^{n+1}}, \quad \sqrt[n(n+1)]{(n+1)^n}.$$

On peut comparer les quantités soumises aux radicaux, après les avoir divisées par n^n , et on a les deux nombres n et $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Or,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1 - \frac{1}{n}}{1.2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1.2.3} + \dots ;$$

en outre, on connaît les résultats

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots < 3.$$

Cela posé, observons que pour $n = 2$ la seconde racine ou $\sqrt[3]{3}$ est plus grande que la première ou $\sqrt[2]{2}$; pour $n = 3$ on a $n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, donc la première racine ou $\sqrt[3]{3}$ est plus grande que la seconde ou $\sqrt[4]{4}$; pour $n > 3$ la pre-

mière est toujours plus grande que la suivante, on a donc

$$\sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > \dots$$

Donc $\sqrt[3]{3}$ est le plus grand terme de la série.

II. *Toute puissance entière d'une somme de deux carrés est elle-même une somme de deux carrés.*

$$(a^2 + b^2)^m = A^2 + B^2.$$

En effet, on a

$$(a + b\sqrt{-1})^m = A + B\sqrt{-1},$$

$$(a - b\sqrt{-1})^m = A - B\sqrt{-1}.$$

Multipliant membre à membre, on a

$$(a^2 + b^2)^m = A^2 + B^2.$$

III. *Calcul de la somme des coefficients, pris de 4 en 4, dans le développement de $(x + a)^m$.*

La question renferme quatre inconnues, car on peut faire la somme à partir du premier terme, du deuxième, du troisième ou du quatrième.

Posons $x = 1$, $a = \sqrt{-1}$, on a

$$(1 + \sqrt{-1})^m = 1 + m\sqrt{-1} - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \\ - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \sqrt{-1} + \dots$$

Désignons par S_1 la somme des coefficients de rang $4n + 1$, n pouvant être nul, par S_2, S_3, S_4 celles de rangs $4n + 2, 4n + 3, 4n$. On a

$$(1) \quad (1 + \sqrt{-1})^m = S_1 + S_2\sqrt{-1} - S_3 - S_4\sqrt{-1},$$

$$(2) \quad (1 - \sqrt{-1})^m = S_1 - S_2\sqrt{-1} - S_3 + S_4\sqrt{-1}.$$

(9)

On sait que la somme 2^{m-1} des coefficients des termes de rang pair égale celle des coefficients des termes de rang impair, donc

$$S_1 + S_3 = 2^{m-1}, \quad S_2 + S_4 = 2^{m-1}.$$

Ajoutant et retranchant successivement (1) et (2), on trouve

$$S_1 - S_3 = \frac{(1 + \sqrt{-1})^m + (1 - \sqrt{-1})^m}{2},$$

$$S_2 - S_4 = \frac{(1 + \sqrt{-1})^m - (1 - \sqrt{-1})^m}{2\sqrt{-1}}.$$

De ces résultats on conclut facilement

$$S_1 = \frac{2^m + (1 + \sqrt{-1})^m + (1 - \sqrt{-1})^m}{4},$$

$$S_3 = \frac{2^m - (1 + \sqrt{-1})^m - (1 - \sqrt{-1})^m}{4},$$

$$S_2 = \frac{2^m \sqrt{-1} + (1 + \sqrt{-1})^m - (1 - \sqrt{-1})^m}{4\sqrt{-1}},$$

$$S_4 = \frac{2^m \sqrt{-1} - (1 + \sqrt{-1})^m + (1 - \sqrt{-1})^m}{4\sqrt{-1}}.$$

Ces quatre valeurs sont réelles, car $\sqrt{-1}$ disparaît dans les réductions.

IV. Dans quelles conditions le quotient

$$\frac{(x+1)^m - x^m - 1}{x^2 + x + 1}$$

est-il entier?

Il faut et il suffit que les racines de l'équation

$$x^2 + x + 1 = 0$$

vérifient l'équation

$$(x + 1)^m - x^m - 1 = 0.$$

Ces racines sont les imaginaires conjuguées

$$-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-3};$$

il suffit de trouver les conditions pour que l'une d'elles vérifie la deuxième équation. Observons que ces valeurs sont les racines imaginaires cubiques de l'unité

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{-3}, \quad \alpha^2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{-3};$$

de plus

$$\alpha + 1 = -\alpha^2.$$

Cherchons donc les valeurs de m pour lesquelles on a

$$(1) \quad (-\alpha^2)^m - \alpha^m - 1 = 0.$$

m désignant un entier quelconque peut être mis sous l'une des formes

$$6p, \quad 6p \pm 1, \quad 6p \pm 2, \quad 6p + 3.$$

1°

$$m = 6p;$$

$$(-\alpha^2)^{6p} = 1, \quad -\alpha^{6p} = -1;$$

le premier membre de (1) se réduit à -1 .

2°

$$m = 6p + 1;$$

$$(-\alpha^2)^{6p+1} = 1 \times (-\alpha^2)^1 = -\alpha^2, \quad -\alpha^{6p+1} = -\alpha;$$

le premier membre de (1) se réduit à $-\alpha^2 - \alpha - 1$, quantité nulle, puisque α est racine de l'équation

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

3°

$$m = 6p - 1;$$

$$(-\alpha^2)^{6p-1} = (-\alpha^2)^{-1} = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad (-\alpha)^{6p-1} = -\frac{1}{\alpha};$$

(11)

le premier membre de (1) se réduit à $-\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} - 1$;
comme on a

$$\alpha\alpha^2 = 1, \quad \frac{1}{\alpha^2} = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha} = \alpha^2,$$

le premier membre est $-\alpha - \alpha^2 - 1$, quantité nulle.

$$4^\circ \quad m = 6p + 2 ;$$

$$(-\alpha^2)^{6p+2} = (-\alpha^2)^2 = \alpha, \quad (-\alpha)^{6p+2} = -\alpha^2,$$

le premier membre de (1) se réduit à $\alpha - \alpha^2 - 1$, quantité qui n'est pas nulle.

$$5^\circ \quad m = 6p - 2 ;$$

le premier membre se réduit à $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} - 1$, ou $\alpha^2 - \alpha - 1$,
quantité qui n'est pas nulle.

$$6^\circ \quad m = 6p + 3 ;$$

le premier membre de (1) se réduit à $(-\alpha^2)^3 - \alpha^3 - 1$
ou -3 .

Pour $m = 3$, on a

$$3x^2 + 3x = 0,$$

équation dont les racines sont réelles. Donc, la condition
nécessaire et suffisante pour que le quotient proposé soit
entier est

$$m = 6p \pm 1.$$

V. *Appliquer la formule du binôme au développement
de $(a + b)^{-1}$.*

Dans le développement

$$(a + b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2}b^2 + \dots$$

remplaçons m par -1 , on trouve

$$(a+b)^{-1} = a^{-1} - a^{-2}b + a^{-3}b^2 - a^{-4}b^3 + \dots \\ + (-1)^p a^{-1-p} b^p + \dots,$$

ou bien

$$(a+b)^{-1} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \dots + (-1)^p \frac{b^p}{a^{p+1}} + \dots$$

Le second membre est composé d'un nombre illimité de termes, puisque les exposants de a vont en croissant au delà de toute limite en valeur absolue.

Le premier membre a une valeur finie $\frac{1}{a+b}$, il en résulte qu'il ne peut être égal au second que tout autant que celui-ci forme une série convergente, ce qui ne peut avoir lieu que si l'on suppose a plus grand que b . Pour $a > b$, le second membre est la somme des termes d'une progression géométrique décroissante indéfiniment dont la raison est $-\frac{b}{a}$, par conséquent elle a pour valeur li-

$$\text{mite } \frac{\frac{1}{a}}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{1}{a+b}.$$

Il résulte de cette analyse que la formule du binôme est applicable au développement de $(a+b)^{-1}$, pourvu que la série soit ordonnée par rapport aux exposants négatifs croissants en valeur absolue du plus grand des deux termes a et b .

VI. Prouver que le logarithme népérien de

$$\cos x + \sqrt{-1} \sin x$$

est $x \sqrt{-1}$.

Prenant la dérivée de $\mathbf{L}(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)$, on a

$$\text{dériv. } \mathbf{L}(\cos x + \sqrt{-1} \sin x) = \frac{-\sin x + \sqrt{-1} \cos x}{\cos x + \sqrt{-1} \sin x}.$$

(13)

Multipliant les deux termes du second membre par la conjuguée du dénominateur et réduisant, on trouve

$$\text{dériv. } L(\cos x + \sqrt{-1} \sin x) = \sqrt{-1}.$$

On trouve de même

$$\text{dériv. } L(\cos x - \sqrt{-1} \sin x) = -\sqrt{-1}.$$

La fonction primitive de $\sqrt{-1}$ est $x \sqrt{-1} + C$; pour $x = 0$, le logarithme est nul, donc $C = 0$, et l'on a

$$L(\cos x + \sqrt{-1} \sin x) = x \sqrt{-1},$$

$$L(\cos x - \sqrt{-1} \sin x) = -x \sqrt{-1}.$$

Observation. Remontant des logarithmes aux nombres, on déduit de ces deux résultats

$$\cos x + \sqrt{-1} \sin x = e^{x\sqrt{-1}},$$

$$\cos x - \sqrt{-1} \sin x = e^{-x\sqrt{-1}};$$

par suite

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\text{tang } x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})\sqrt{-1}}.$$

Pour $x = 2\pi$,

$$\cos 2\pi = 1, \quad \sin 2\pi = 0,$$

et l'on a

$$e^{2\pi\sqrt{-1}} = 1.$$

Conséquences. 1° On a trouvé

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \dots;$$

(14)

remplaçant x par $x\sqrt{-1}$, on a, pour

$$e^{x\sqrt{-1}} \text{ ou } \cos x + \sqrt{-1} \sin x,$$

le développement

$$\begin{aligned} \cos x + \sqrt{-1} \sin x = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} \\ + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots; \end{aligned}$$

égalant séparément les parties réelles et les coefficients des imaginaires

$$\begin{aligned} \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots, \\ \sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots \end{aligned}$$

2° *Le logarithme d'une quantité négative est une quantité imaginaire.*

Toute quantité imaginaire peut se mettre sous la forme

$$a + b\sqrt{-1} = \rho(\cos x + \sqrt{-1} \sin x),$$

sous la condition

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

On a donc

$$\cos x + \sqrt{-1} \sin x = \frac{a + b\sqrt{-1}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = e^{x\sqrt{-1}}.$$

Observant que l'on a identiquement

$$\sqrt{a^2 + b^2} = e^{L\sqrt{a^2 + b^2}},$$

on peut écrire

$$a + b\sqrt{-1} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{x\sqrt{-1}} = e^{x\sqrt{-1} + L\sqrt{a^2 + b^2}};$$

(15)

remplaçant x par $2k\pi + x$, il vient

$$a + b\sqrt{-1} = e^{(2k\pi + x)\sqrt{-1}} + L\sqrt{a^2 + b^2},$$

d'où l'on déduit

$$L(a + b\sqrt{-1}) = (2k\pi + x)\sqrt{-1} + L\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si on suppose successivement

$$b = 0, \quad a > 0,$$

$$b = 0, \quad a < 0,$$

on trouve

$$La = La + 2k\pi\sqrt{-1},$$

$$L(-a) = La + (2k + 1)\pi\sqrt{-1}.$$

Ces résultats apprennent qu'une quantité a une infinité de logarithmes, et que le logarithme d'une quantité négative est nécessairement imaginaire.